

# Differentiell superkontinuierliche Funktionenklassen

Die Kunst der mathematischen Metamorphosen

Stefan Pudritzki

Göttingen

20. April 2010

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mathematik und Natur</b>	<b>5</b>
1.1	Die Probleme bei einigen Grundbegriffen . . . . .	5
1.1.1	Differentiell superkontinuierliche Funktionen . . . . .	5
1.1.2	Relative Konvergenz . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Allgemeine Operationen</b>	<b>11</b>
2.1	Verschieben . . . . .	11
2.2	Strecken . . . . .	11
2.3	Lineare Interpolation . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Differentiell superkontinuierliche Grundbegriffe</b>	<b>13</b>
3.1	Absolutbeträge . . . . .	13
3.1.1	Konvergenzbetrachtungen . . . . .	15
3.2	Positive Halbachsen . . . . .	17
3.3	Vorzeichenfunktionen, Signumfunktionen . . . . .	18
3.4	Stufenfunktionen, Schaltfunktionen . . . . .	19
3.5	Deltafunktionen . . . . .	21
3.6	Zickzackfunktionen . . . . .	22
3.7	$X$ -Funktionen . . . . .	24
3.8	Einsfunktionen . . . . .	25
3.9	Nullfunktionen . . . . .	26
3.10	Asymptotische Logarithmen . . . . .	28

3.11	Asymptotische Inverse der Multiplikation . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Bearbeiten von Funktionen</b>	<b>31</b>
4.1	Einschalter . . . . .	31
4.2	Ausschalter . . . . .	31
4.3	Herausgreifen eines Intervalls . . . . .	32
4.4	Hakenfunktionen . . . . .	33
4.5	Krallenfunktionen . . . . .	33
4.6	Ausblenden eines Intervalls . . . . .	34
4.7	Wechsel zwischen zwei Funktionen . . . . .	36
4.8	Löschen eines Intervalls . . . . .	38
4.9	Einfügen von Leerraum . . . . .	39
4.10	Kopieren eines Intervalls . . . . .	40
4.11	Einfügen eines Intervalls . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Bügeleisen und Häckselmaschinen</b>	<b>43</b>
5.1	Glätten von Polstellen . . . . .	43
5.2	Zerschneiden von Differentiellen Superkontinua . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Komplexere Funktionenklassen</b>	<b>49</b>
6.1	Treppe . . . . .	49
6.2	Sägezähne . . . . .	51
6.3	Kammfunktionen . . . . .	53
6.4	Gleichrichterfunktionen . . . . .	58
6.5	Verstärkerfunktionen . . . . .	60
6.6	Gleitwellenfunktionen (Sweep) . . . . .	62
6.7	Hohlraumstrahlungsformel . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Bahnkurven</b>	<b>69</b>

8	Schlussbemerkungen und Ausblicke	79
A	Wichtige Beziehungen	81
B	Parameter der Funktionenklassen	83



# Kapitel 1

## Mathematik und Natur

### 1.1 Die Probleme bei einigen Grundbegriffen

Diesem Aufsatz liegt ein Weltbild zugrunde, das das gesamte Universum als ein zusammenhängendes, glattes Ganzes auffasst. Es wird davon ausgegangen, dass es keine perfekt scharf abgegrenzte Teilchen gibt. Die elektrischen und gravitativen Kraftfelder sind räumlich beliebig weit reichend und sind Ausdruck der Existenz der Teilchen selbst. Der Begriff des Teilchens wird mit der Gesamtheit seiner Felder gleichgesetzt. Ein Elementarteilchen ist eine starke Konzentration seiner Felder in der Umgebung seines Aufenthaltsortes.

Physikalische Mathematik sollte eine Grundlage dafür liefern, die Natur möglichst gut nachbilden und beschreiben zu können. Unter der Voraussetzung eines ganzheitlichen Weltbildes ist es notwendig, passende mathematische Grundlagen für die Beschreibung der Natur zu finden.

Es liegt zunächst nahe, den Begriff des Kontinuums zur Beschreibung eines ganzheitlichen Weltbildes zu verwenden. Nach der 18. Auflage des Dudens bedeutet *kontinuierlich* stetig, fortdauernd, unaufhörlich, durchlaufend. Das entsprechende Substantiv *Kontinuum* bedeutet nach dem Duden lückenloses Zusammenhängendes, Stetiges.

Im Englischen bedeutet der mathematische Begriff *continuous* das Gleiche wie der deutsche mathematische Begriff *stetig*. Stetige Funktionen können aber Knicke enthalten, die nach einer Differentialableitung zu Sprüngen führen können, z.B. die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$ . Das hier vorgestellte Weltbild erfordert aber einen neuen, viel strengeren und weitergehenden Begriff:

#### 1.1.1 Differentiell superkontinuierliche Funktionen

Eine Funktion  $f(x)$  soll *differentiell superkontinuierlich in  $x$*  heißen, wenn sie in jedem Punkt  $x_0$  aus der Menge aller reellen Zahlen als Definitionsbereich beliebig oft nach der Variablen  $x$  differenzierbar ist und ohne stetige Fortsetzung und ohne Fallunterscheidung in jedem Punkt einen eindeutigen Funktionswert besitzt.

Der Definitionsbereich ist als Voraussetzung immer die gesamte Menge der reellen Zahlen. Einschränkungen des Definitionsbereiches durch das Ausschließen von Intervallen oder einzelnen Punkten ist für diese Begriffsdefinition der differentiell superkontinuierlichen Funktionen nicht zulässig.

Jede differentiell superkontinuierliche Funktion  $f(x)$  ist in jedem Punkt in eine Taylorreihe entwickelbar, da sie in jedem Punkt beliebig oft differenzierbar ist.

Wenn ein differentiell superkontinuierliches Weltbild vorausgesetzt wird, muss zuvor unbedingt überprüft werden, inwieweit die mathematischen Grundbegriffe mit Beschreibungen von Differentiellen Superkontinua vereinbar sind. Offensichtlich ist nur zu überprüfen, welche der elementaren mathematischen Funktionen differentiell superkontinuierlich sind.

Die Selektion nach differentiell superkontinuierlichen Funktionen und nicht differentiell superkontinuierlichen Funktionen ist deshalb so wichtig, da bei der Anwendung der Differentialrechnung auf nicht differentiell superkontinuierliche Funktionen sehr leicht ein aussagenlogischer Widerspruch erzeugt werden kann: Wenn bei der Anwendung des Differentialoperators  $\partial_x = \frac{d}{dx}$  auf eine Funktion  $f(x)$  implizit vorausgesetzt wird, dass zu jedem Punkt  $x_0$  bezüglich der Variablen  $x$  ein Differentialquotient existiert und diese Funktion auch nur in einem einzigen Punkt nicht differenzierbar ist, so existiert für diesen Punkt kein Differentialquotient und steht somit im Widerspruch zu der impliziten Voraussetzung!

Dieser etwas versteckte Widerspruch ist ernst zu nehmen, denn mit Hilfe eines Widerspruches lassen sich aufgrund der Eigenschaften der aussagenlogischen Implikation sowohl falsche als auch wahre Aussagen herleiten. Wenn wir aufgrund der gemachten Voraussetzungen auf wahre Aussagen stoßen, neigen wir als Menschen dazu, diese Voraussetzungen (vielleicht unbewusst) für richtig zu halten, was natürlich eine unzulässige Umkehrung der Implikation bedeutet. Diese Neigung tritt besonders dann ein, wenn wir auf sehr viele wahre Aussagen und auf nur sehr wenige falsche Aussagen stoßen. In einer solchen Situation werden dann gerne Korrekturen vorgenommen, um die Widersprüche nachträglich zu beseitigen, anstatt die Voraussetzungen zu korrigieren.

Allerdings bleibt uns in den Naturwissenschaften nichts anderes übrig, aufgrund vorhandener experimenteller Befunde die aussagenlogische Implikation zunächst falsch (rückwärts) anzuwenden, wenn wir ein Modell zu den Befunden entwickeln wollen. Wir hoffen dann, dass dieses Modell als ein Satz von aussagenlogischen Voraussetzungen zu möglichst wenigen Widersprüchen führt. Wenn wir dann doch auf Widersprüche stoßen, so sollte vermieden werden, Befunde, die zu Widersprüchen führen als neue Spezialeffekte zu deuten. Vielmehr sollten die Grundannahmen des Modells modifiziert werden. Die Grundannahmen eines Modells dürfen also niemals als *“Heilige Kuh”* als unantastbar gelten.

Ein Versuch der Mathematik, Widersprüche zur Differentialrechnung im Nachhinein zu korrigieren, sehe ich u.a. in der Beschränkung von Definitionsbereichen durch Ausschluss von Definitionslücken oder stetige Fortsetzung von Definitionslücken.

Ein klassisches Beispiel liefert die folgende Funktion:

Sei

$$f(x) = \exp\left(-\frac{a^2}{x^2}\right)$$

Falls die Definitionslücke im Nullpunkt durch  $f(0) := 0$  stetig fortgesetzt wird, scheint alles in Ordnung zu sein. Der Versuch, eine Taylorreihenentwicklung im Punkt 0 durchzuführen, führt jedoch zu einem falschen Ergebnis.

Der Widerspruch wird schon bei dem Versuch, die Kettenregel anzuwenden, sichtbar. Die eben genannte innere Funktion  $-\frac{a^2}{x^2}$  ist wegen der Polstelle bei  $x = 0$  nicht differenzierbar.

Die Tragweite dieser Widerspruchsbehauptung ist kaum abzusehen, da immer wieder neue Zusatzregeln von den Wurzeln der Widersprüche ablenken, z.B. die Erfindung zusätzlicher Stetigkeitsbedingungen oder Randbedingungen für abschnittsweise definierte Funktionen an den Anschlussstellen bzw. den Rändern, Integrabilitätskriterien, Definitionen von Funktionen oder einzelnen Funktionswerten per Fallunterscheidung, die Abwandlung der Definition für die Differenzierbarkeit durch Einführung von rechtseitiger und linksseitiger Ableitung oder gar die Erfindung des Begriffes der stetig behebbaren Definitionslücke.

Viele der elementaren mathematischen Grundbegriffe und Funktionen sind von der Nicht-differenzierbarkeit in mindestens einem Punkt betroffen; es sind dies beispielsweise der Logarithmus  $\ln(x)$ , der Tangens  $\tan(x)$ , die Wurzelfunktion  $\sqrt{x}$ , der metrische Betrag  $|x|$ , das Inverse  $x^{-1}$  zu  $x$  bezüglich der Multiplikation (Kehrwert), die Dirac-Delta-Distribution  $\delta(x)$ , die Vorzeichenfunktion  $\operatorname{sgn}(x)$  etc.

Der Kern meiner Aussage ist, dass alle diese Grundbegriffe der Differentialrechnung widersprechen, aber dennoch in der Physik fast überall im Zusammenhang mit Differentialoperationen verwendet werden!

Das nach meiner Einschätzung wichtigste und schwerwiegendste Beispiel ist das in der Elektrodynamik, in der Atomphysik und in der Quantenmechanik verwendete Coulombpotential, das im Nullpunkt eine Polstelle hat. Der funktionale Teil ohne physikalische Konstanten hat mit  $r = |\vec{r}|$  die Form

$$f(r) = \frac{1}{r}$$

Die Anwendung des Laplace-Differentialoperators liefert beispielsweise für jedes (!)  $\vec{r}$  außerhalb des Nullpunktes

$$\forall \vec{r} \neq \vec{0} : \{\Delta f\} = 0$$



Dieses Ergebnis führt natürlich bei dem Versuch einer physikalischen Interpretation als Quellenstärke der zum Potentialfeld gehörenden Kraft bzw. Feldstärke zu grandiosen Irritationen. Desweiteren liefert die Polstelle, insbesondere in der Atomphysik und Kernphysik, einen Nährboden für wilde Spekulationen der Energien und Kräfte um den Nullpunkt herum.

Um Abhilfe zu schaffen ist es notwendig, diese nicht differentiell superkontinuierlichen Begriffe so zu verändern, dass ausschließlich differentiell superkontinuierliche Funktionen vorliegen. Es ist immer möglich, eine betroffene Funktion so abzuwandeln, dass eine große Abweichung vom bisherigen Begriff lediglich in unmittelbarer Nähe der nicht differenzierbaren Stelle vorliegt und die abgewandelte Funktion sich für große Entfernungen von der betroffenen Stelle asymptotisch dem ursprünglichen Funktionsbegriff annähert oder wenigstens relativ konvergent (s. Abschnitt (1.1.2)) zu dieser ursprünglichen Funktion ist.

Eine Umkehrfunktion einer in  $x$  differentiell superkontinuierlichen Funktion  $f(x)$  ist nur dann differentiell superkontinuierlich, wenn die Funktion  $f(x)$  entweder streng monoton wachsend oder fallend und sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ist.

Alle Umkehrfunktionen von nicht streng monotonen oder von beschränkten Funktionen sind nicht differentiell superkontinuierlich und werden deshalb nicht als Operanden von Differentialoperatoren verwendet.

Die Beschränkung auf ausschließlich differentiell superkontinuierliche Funktionen hat die folgenden mathematischen Vorteile:

1. Bei Funktionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen  $f(x, y)$  sind beim Differenzieren die beiden Differentialoperatoren  $\partial_x$  und  $\partial_y$  vertauschbar
2. Bei einem Doppelintegral über zwei unabhängige Variablen  $x, y$  sind die beiden Integraloperatoren  $\int_{x_1}^{x_2} dx$  und  $\int_{y_1}^{y_2} dy$  vertauschbar
3. Jedes Integral mit endlichen Integrationsgrenzen ist beschränkt
4. Die Taylorentwicklung ist in jedem Punkt möglich und eindeutig
5. Es gibt keine Punkte mit unentscheidbaren Aussagen
6. Die Behandlung dieser Funktionen in Differentialgleichungen und die Simulation auf numerischen Maschinen ist vollkommen harmlos

### 1.1.2 Relative Konvergenz

Eine Funktion  $f(x)$  soll *“relativ konvergent gegen die Funktion  $g(x)$ “* oder zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  sollen *“zueinander relativ konvergent“* heißen, wenn der Quotient beider Funktionen  $\frac{f(x)}{g(x)}$  im Grenzfall  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow +\infty$  den Grenzwert 1 hat.

Selbst wenn die absolute Differenz zweier Funktionen  $|g(x) - f(x)|$  nicht gegen Null konvergiert, ist es physikalisch sinnvoll von einer relativen Konvergenz zu sprechen, wenn mit größer werdendem Betrag von  $x$  die absolute Differenz relativ zum Funktionswert an relativer Bedeutung verliert.

Aus der Begriffsdefinition folgt, dass der Quotient zweier zueinander relativ konvergenter Funktionen minus 1 gegen Null konvergiert:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$

Bei Umformung des Terms auf der linken Seite sehen wir den relativen Bedeutungsverlust der Absolutdifferenz:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} &\rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty \\ \implies \frac{|f(x) - g(x)|}{g(x)} &\rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Ob beispielsweise eine konstante Absolutdifferenz relevant ist, hängt vom Kontext der Fragestellung ab. Wenn beispielsweise zwei Achthundertmeterläufer nach dem Startschuss unterschiedlich lange Reaktionszeiten haben, aber beide Läufer nach ihrer individuellen Reaktionszeit den gleichen Geschwindigkeitsverlauf  $v(t)$  haben, kommen sie trotz gleicher Leistung zu unterschiedlichen Zeitpunkten im Ziel an. Die anfänglich kleine Zeitdifferenz behält unter dem Aspekt der Regeln der Olympischen Spiele bis zum Ziel gleichbleibende Bedeutung. Unter der Fragestellung der körperlichen Leistungsfähigkeit verliert jedoch die kleine Zeitdifferenz mit zunehmender Zeit an relativer Bedeutung.



# Kapitel 2

## Allgemeine Operationen

Für die später noch folgenden Operatordefinitionen werden zum Teil Operationen auf Funktionen benötigt, die noch keine Spezialdefinitionen sind:

### 2.1 Verschieben

Eine Funktion  $f(x)$  mit reellem  $x$  tritt hier als Operand des Verschiebeoperators auf:

$$\text{Shift}_x(f, a, x) := f(x - a) \quad \text{Verschiebung um } a \text{ nach rechts}$$

$$\text{Shift}_y(f, a, x) := f(x) + a \quad \text{Verschiebung um } a \text{ nach oben}$$

### 2.2 Strecken

$$\text{Stretch}_x(f, a, x) := f\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{Horizontales Strecken um den Faktor } a$$

$$\text{Stretch}_y(f, a, x) := af(x) \quad \text{Vertikales Strecken um den Faktor } a$$

## 2.3 Lineare Interpolation

Eine Funktion  $f(x)$  wird zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  wie folgt linear interpoliert:

$$\text{LI}(f, a, b, x) := \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \left( x - \frac{a + b}{2} \right)$$

# Kapitel 3

## Differentiell superkontinuierliche Grundbegriffe

Der Neudefinition einer Funktionenklasse  $A_{ds}(x, \beta)$ , die die Menge aller Funktionen darstellt, die dem konventionellen metrischen Absolutbetrag  $\text{abs}(x)$  ähnelt, wird in den darauf folgenden Begriffsdefinitionen eine zentrale Rolle zukommen. Die Namen erhalten einen Index mit den beiden kleinen Buchstaben ds zur Kennzeichnung einer differentiell superkontinuierlichen (englisch: “*differentially super-continuous*”) Funktion oder Funktionenklasse, um Verwechslungen mit den bisherigen Definitionen auszuschließen.

Eine solche Funktionenklasse hat immer mindestens zwei Funktionsargumente, die reelle Variable  $x$  mit der abstrakten physikalischen Einheit  $u$  und der reelle Parameter  $\beta$  mit der abstrakten physikalischen Einheit  $\frac{1}{u}$ , der bestimmt, wie stark eine konkrete Darstellung aus der Funktionenklasse gegen den konventionellen Begriff konvergiert. Der Parameter  $\beta$  ist der Kehrwert eines kleinen, positiven Wertes  $\varepsilon > 0$ , der bei einem konkreten physikalischen Problem eine Konstante darstellt.  $\varepsilon$  hat dieselbe physikalische Einheit wie die Variable  $x$ .

Alle Funktionen einer solchen Klasse sind differentiell superkontinuierlich und sind jeweils paarweise relativ konvergent zueinander.

Wenn aus einer Funktionenklasse  $F_{ds}(x, \beta)$  eine konkrete Darstellung, bei der eine Funktion  $\text{abc}(x)$  eine wesentliche Rolle spielt, benutzt werden soll, dann wird der Name abc durch ein vorangestelltes Komma an den Index ds der Funktionenklasse angehängt, z.B.  $F_{ds,\text{abc}}(x, \beta)$ .

### 3.1 Absolutbeträge

Die Funktionenklasse  $A_{ds}(x, \beta)$  sei die Menge aller in  $x$  differentiell superkontinuierlichen Funktionen, die für festes  $\beta > 0$  und für  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow +\infty$  relativ gegen die Funktion  $|x|$  konvergieren:

$$\frac{A_{\text{ds}}(x, \beta)}{|x|} \rightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$

Als konkrete Darstellungen möchte ich fünf Beispiele anführen:

$$A_{\text{ds,tanh}}(x, \beta) := \frac{1}{\beta} \ln(\cosh(\beta x))$$

$$A_{\text{ds,arctan}}(x, \beta) := \frac{2}{\pi} \left( x \arctan\left(\frac{\pi}{2}\beta x\right) - \frac{1}{\pi\beta} \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\beta^2 x^2\right) \right)$$

$$A_{\text{ds,sqrt}}(x, \beta) := \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 x^2 + 1}$$

$$A_{\text{ds,Fermi}}(x, \beta) := \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{2\beta x}) - x$$

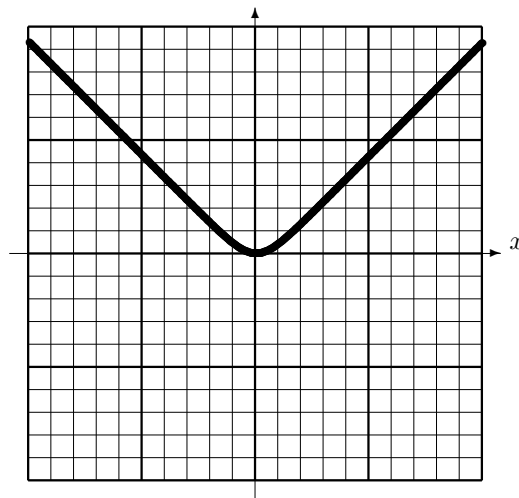
$$A_{\text{ds,arsinh}}(x, \beta) := \frac{1}{\beta} \operatorname{arsinh}(\cosh(\beta x))$$

Bei den graphischen Darstellungen möchte ich mich jeweils auf die Tangens–hyperbolicus–Darstellung beschränken. Der Darstellungsbereich der  $x$ -Achse liegt bei den meisten Funktionen im Intervall  $[-10, +10]$  u, wobei u die physikalische Einheit der Variable  $x$  ist; der Parameter ist meistens  $\beta = \frac{1}{\text{u}}$ :

$$A_{\text{ds,tanh}}\left(x, \frac{1}{\text{u}}\right)$$

$$x \in [-10, +10] \text{ u,}$$

$$y \in [-10, +10] \text{ u}$$



Als eine spezielle Unterklasse von differentiell superkontinuierlichen Absolutbetrags-Funktionen werden alle differentiell superkontinuierlichen Betragsfunktionen definiert, die als Minimum bei  $x = 0$  eine untere Grenze größer als Null haben:

$$\frac{a_{\text{ds}}(x, \beta)}{|x|} \rightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$

$$\wedge a_{\text{ds}}(0, \beta) > 0$$

So haben beispielsweise die Wurzel-Darstellung  $A_{\text{ds},\text{sqrt}}$  die untere Grenze  $\frac{1}{\beta}$ , die Fermi-Darstellung  $A_{\text{ds},\text{Fermi}}$  die untere Grenze  $\frac{\ln(2)}{\beta}$  und die Areasin-hyperbolicus-Variante die untere Grenze  $\frac{\text{arsinh}(1)}{\beta}$

### 3.1.1 Konvergenzbetrachtungen

**Grenzfunktion der Tangens-hyperbolicus-Betragsfunktion:**

$$A_{\text{ds},\text{tanh}}(x, \beta) = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{1}{2} (e^{-\beta x} + e^{+\beta x}) \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{1}{2} e^{\beta|x|} \right) \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$

$$\implies A_{\text{ds},\text{tanh}}(x, \beta) \rightarrow |x| - \frac{1}{\beta} \ln(2) \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$

**Grenzfunktion der Arcus-tangens-Betragsfunktion:**

$$A_{\text{ds},\text{arctan}}(x, \beta) \rightarrow \frac{2}{\pi} \left( |x| \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi\beta} \ln \left( \frac{\pi^2}{4} \beta^2 x^2 \right) \right) \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$

$$\implies A_{\text{ds},\text{arctan}}(x, \beta) \rightarrow |x| - \frac{4}{\pi^2\beta} \ln \left( \frac{\pi}{2} \beta |x| \right) \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$

**Grenzfunktion der Wurzel-Betragsfunktion:**

$$A_{\text{ds},\text{sqrt}}(x, \beta) \rightarrow |x| \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$



### Grenzfunktion der Fermi–Betragsfunktion:

Für  $x \rightarrow -\infty$  konvergiert der Logarithmustrm gegen Null. Der Gesamtausdruck konvergiert deshalb gegen  $|x|$ . Für  $x \rightarrow +\infty$  konvergiert der erste Term gegen

$$\frac{1}{\beta} \ln(e^{2\beta x}) = 2x$$

Der Gesamtausdruck ist hier  $2x - x = x = |x|$ . In beiden Grenzfällen ist also die Betragsfunktion die Grenzfunktion:

$$A_{\text{ds,Fermi}}(x, \beta) \rightarrow |x| \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } x \rightarrow +\infty$$

### Grenzfunktion der Areasin–hyperbolicus–Betragsfunktion

Die Sinus–hyperbolicus–Funktion und die Cosinus–hyperbolicus–Funktion haben die folgende Konvergenz–Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \cosh(\beta x) &\rightarrow \sinh(\beta x) \quad \text{für } x \rightarrow +\infty \\ \cosh(\beta x) &\rightarrow -\sinh(\beta x) \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Deshalb konvergiert diese Abstandsfunktion gegen den Betrag von  $x$ :

$$A_{\text{ds,arsinh}}(x, be) \rightarrow \frac{1}{\beta} \beta |x| = |x|$$

Nicht alle differentiell superkontinuierlichen Betragsfunktionen haben den konventionellen Betrag als Grenzfunktion, da manche Funktionen einen nicht nullkonvergenten Abstand zur konventionellen Betragsfunktion haben; sie sind aber alle zu dem konventionellen Betrag relativ konvergent.

## 3.2 Positive Halbachsen

Eine Funktionenklasse  $R_{\text{ds}}(x, \beta)$ , deren Funktionen für positive  $x$  relativ konvergent gegen die Funktion  $x$  sind und für negative  $x$  nahe bei Null liegen, gewinnen wir dadurch, indem die Koordinate  $x$  zur Funktionenklasse  $A_{\text{ds}}(x, \beta)$  addiert und die Summe durch 2 dividiert wird:

$$R_{\text{ds}}(x, \beta) := \frac{1}{2}(x + A_{\text{ds}}(x, \beta))$$

Die fünf konkreten Darstellungen lauten:

$$R_{\text{ds,tanh}}(x, \beta) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{\beta} \ln(\cosh(\beta x)) \right)$$

$$R_{\text{ds,arctan}}(x, \beta) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{\pi} \left( x \arctan \left( \frac{\pi}{2} \beta x \right) - \frac{1}{\pi \beta} \ln \left( 1 + \frac{\pi^2}{4} \beta^2 x^2 \right) \right) \right)$$

$$R_{\text{ds,sqrt}}(x, \beta) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 x^2 + 1} \right)$$

$$R_{\text{ds,Fermi}}(x, \beta) = \frac{1}{2\beta} \ln(1 + e^{2\beta x})$$

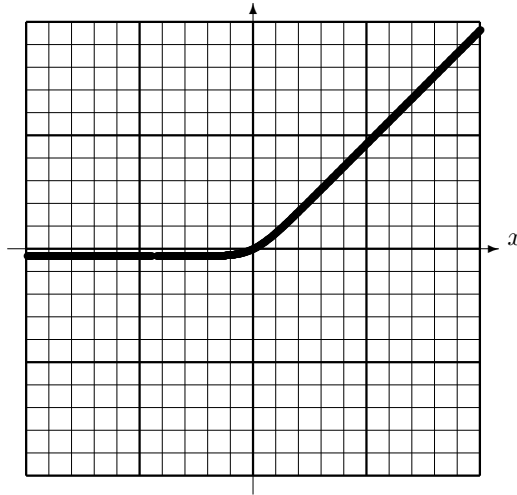
$$R_{\text{ds,arsinh}}(x, \beta) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{\beta} \operatorname{arsinh}(\cosh(\beta x)) \right)$$

Der Graph zeigt die Tangens-hyperbolicus-Darstellung mit leicht negativem Anteil für negative  $x$ :

$$R_{\text{ds,tanh}}\left(x, \frac{1}{u}\right)$$

$$x \in [-10, +10] \text{ u,}$$

$$y \in [-10, +10] \text{ u}$$



### 3.3 Vorzeichenfunktionen, Signumfunktionen

Die Funktionenklasse für die asymptotische Ermittlung des Vorzeichens von  $x$  ergibt sich aus der Differentialableitung der Funktionenklasse der relativ konvergenten Absolutbeträge nach  $x$ :

$$S_{\text{ds}}(x, \beta) := \{ \partial_x A_{\text{ds}}(x, \beta) \}$$

Die fünf konkreten Darstellungen sind:

$$S_{\text{ds,tanh}}(x, \beta) = \tanh(\beta x)$$

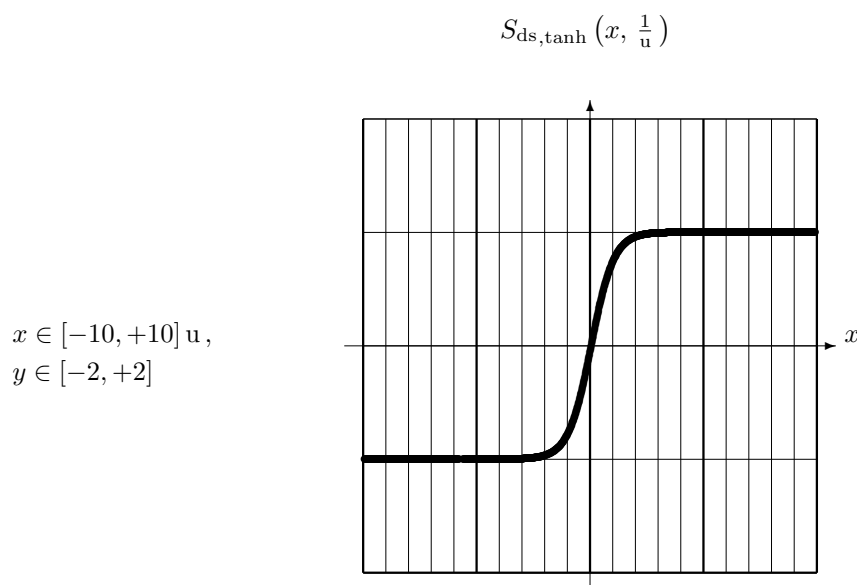
$$S_{\text{ds,arctan}}(x, \beta) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{2}\beta x\right)$$

$$S_{\text{ds,sqrt}}(x, \beta) = \frac{\beta x}{\sqrt{\beta^2 x^2 + 1}}$$

$$S_{\text{ds,Fermi}}(x, \beta) = \frac{2}{1 + e^{-2\beta x}} - 1$$

$$S_{\text{ds,arsinh}}(x, \beta) = \frac{\sinh(\beta x)}{\sqrt{\cosh^2(\beta x) + 1}}$$

Der Graph zeigt die Tangens-hyperbolicus-Darstellung:



Die Tangens-hyperbolicus-Signumsfunktion und die Fermi-Signumsfunktion sind identisch. Dies zeigen die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} \tanh(\beta x) &= \frac{\sinh(\beta x)}{\cosh(\beta x)} = \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta x} + e^{-\beta x}} + 1 - 1 = \left( \frac{1 - e^{-2\beta x}}{1 + e^{-2\beta x}} + 1 \right) - 1 \\ \tanh(\beta x) &= \frac{1 - e^{-2\beta x} + 1 + e^{-2\beta x}}{1 + e^{-2\beta x}} - 1 = \frac{2}{1 + e^{-2\beta x}} - 1 \end{aligned}$$

Die Tangens-hyperbolicus-Abstandsfunktion und die Fermi-Abstandsfunktion liefern ein sehr interessantes Beispiel zweier Funktionen, die sich trotz unterschiedlicher Erscheinungsbilder der formalen Darstellung für alle  $x$  nur um einen konstanten Wert voneinander unterscheiden, denn ihre Differentialableitungen (und folglich auch alle höheren Ableitungsgrade) sind identisch!

### 3.4 Stufenfunktionen, Schaltfunktionen

Die Funktionenklasse für differentiell superkontinuierliche Stufenfunktionen ergibt sich durch die Differentialableitung der Klasse der positiven Halbachsen  $R_{\text{ds}}(x, \beta)$ :

$$\theta_{\text{ds}}(x, \beta) := \{ \partial_x R_{\text{ds}}(x, \beta) \}$$

oder durch die halbe Summe aus Eins und der Klasse der Vorzeichenfunktionen:

$$\theta_{\text{ds}}(x, \beta) = \frac{1}{2} (1 + S_{\text{ds}}(x, \beta))$$

In den fünf konkreten Darstellungen ausgedrückt:

$$\theta_{\text{ds,tanh}}(x, \beta) = \frac{1}{2} (1 + \tanh(\beta x))$$

$$\theta_{\text{ds,arctan}}(x, \beta) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\pi}{2} \beta x \right) \right)$$

$$\theta_{\text{ds,sqrt}}(x, \beta) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\beta x}{\sqrt{\beta^2 x^2 + 1}} \right)$$

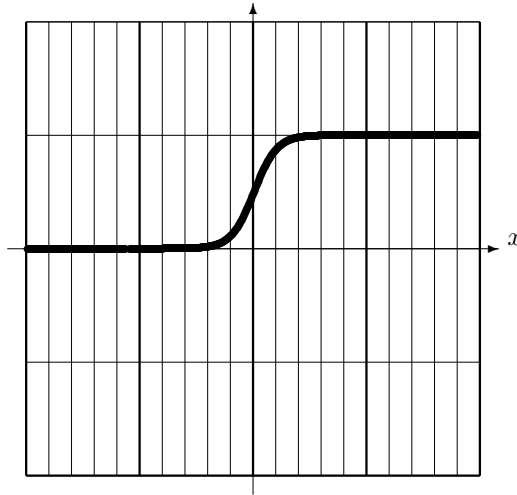
$$\theta_{\text{ds,Fermi}}(x, \beta) = \frac{1}{1 + e^{-2\beta x}}$$

$$\theta_{\text{ds,arsinh}}(x, \beta) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sinh(\beta x)}{\sqrt{\cosh^2(\beta x) + 1}} \right)$$

Der Graph zeigt die Tangens–hyperbolicus–Darstellung:

$$\theta_{\text{ds,tanh}}\left(x, \frac{1}{u}\right)$$

$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-2, +2]$$



Solche differentiell superkontinuierlichen Schaltfunktionen werden z.B. als logistische Wachstumsfunktion oder im Zusammenhang der Fuzzy-Logic verwendet. Allerdings wird die Variablen  $x$  meistens als dimensionslose Variable ohne Parameter verwendet. Im Unterschied dazu hat die Variable  $x$  einer differentiell superkontinuierlichen Funktion die allgemeine physikalische Einheit  $u$  und den begleitenden Parameter  $\beta$  mit der Einheit  $\frac{1}{u}$ , damit das Produkt  $\beta x$  wieder dimensionslos wird.

### 3.5 Deltafunktionen

Die Funktionenklasse der Deltafunktionen ist die Differentialableitung der Funktionenklasse der Stufenfunktionen nach der Variablen  $x$ :

$$\delta_{\text{ds}}(x, \beta) := \{ \partial_x \theta_{\text{ds}}(x, \beta) \} = \left\{ \partial_x^2 R_{\text{ds}}(x, \beta) \right\}$$

Und hier die fünf konkreten Darstellungen von Deltafunktionen:

$$\delta_{\text{ds,tanh}}(x, \beta) = \frac{\beta}{2} \left( 1 - \tanh^2(\beta x) \right)$$

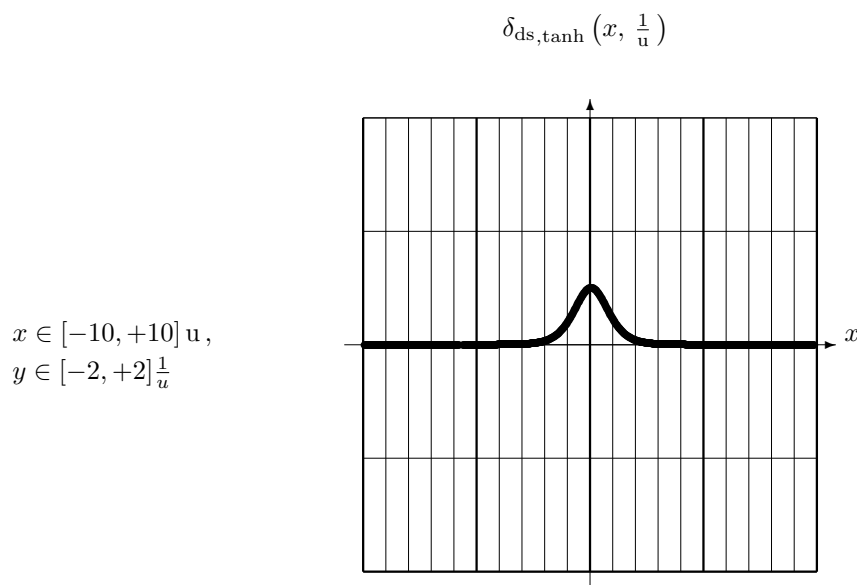
$$\delta_{\text{ds,arctan}}(x, \beta) = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} \beta^2 x^2 + 1}$$

$$\delta_{\text{ds},\text{sqrt}}(x, \beta) = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta^2 x^2 + 1}^3}$$

$$\delta_{\text{ds},\text{Fermi}}(x, \beta) = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{\cosh^2(\beta x)}$$

$$\delta_{\text{ds},\text{arsinh}}(x, \beta) = \beta \frac{\cosh(\beta x)}{\sqrt{\cosh^2(\beta x) + 1}^3}$$

Die Tangens–hyperbolicus–Deltafunktion hat das folgende graphische Bild:



Aus den bisherigen Definitionen können wir eine Beziehungsgleichung zwischen den Sigmumfunktionen und den Deltafunktionen herleiten:

$$\delta_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x \theta_{\text{ds}}(x, \beta)\} = \{\partial_x^2 R_{\text{ds}}(x, \beta)\} = \left\{ \partial_x^2 \frac{1}{2} (x + A_{\text{ds}}(x, \beta)) \right\} = \frac{1}{2} \{\partial_x S_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

### 3.6 Zickzackfunktionen

Die Funktionenklasse der Zickzackfunktionen ergibt sich wiederum durch Differentialableitung der Funktionenklasse der Deltafunktionen:

$$Z_{\text{ds}}(x, \beta) := \{ \partial_x \delta_{\text{ds}}(x, \beta) \} = \{ \partial_x^2 \theta_{\text{ds}}(x, \beta) \} = \{ \partial_x^3 R_{\text{ds}}(x, \beta) \}$$

Die fünf konkrete Darstellungen der Zickzackfunktionen sind:

$$Z_{\text{ds,tanh}}(x, \beta) = -\beta^2 \tanh(\beta x) (1 - \tanh^2(\beta x))$$

$$Z_{\text{ds,arctan}}(x, \beta) = -\frac{\pi^2}{4} \beta^2 \cdot \frac{\beta x}{\left(\frac{\pi^2}{4} \beta^2 x^2 + 1\right)^2}$$

$$Z_{\text{ds,sqrt}}(x, \beta) = -\frac{3}{2} \beta^2 \cdot \frac{\beta x}{\sqrt{\beta^2 x^2 + 1}^5}$$

$$Z_{\text{ds,Fermi}}(x, \beta) = -\beta^2 \frac{\tanh(\beta x)}{\cosh^2(\beta x)}$$

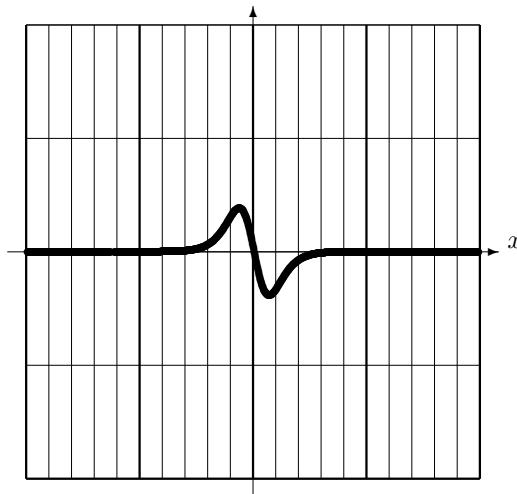
$$Z_{\text{ds,arsinh}}(x, \beta) = \beta^2 \frac{\sinh(\beta x)}{\sqrt{\cosh^2(\beta x) + 1}^5} \cdot (1 - 2 \cosh^2(\beta x))$$

Graph der Tangens–hyperbolicus–Darstellung ist:

$$Z_{\text{ds,tanh}}\left(x, \frac{1}{u}\right)$$

$$x \in [-10, +10] \text{ u,}$$

$$y \in [-2, +2] \frac{1}{u^2}$$





### 3.7 $X$ -Funktionen

Die Funktionenklasse der  $X$ -Funktionen wird als das Produkt von Absolutwertfunktionen und Signumsfunktionen definiert:

$$X_{\text{ds}}(x, \beta) := A_{\text{ds}}(x, \beta) \cdot S_{\text{ds}}(x, \beta)$$

Das Produkt ist hier wie folgt gemeint: Sind zwei Funktionen  $F_{\text{ds},\text{abc}}(x, \beta)$  und  $G_{\text{ds},\text{abc}}(x, \beta)$  jeweils konkrete Funktionen der Funktionenklassen  $F_{\text{ds}}(x, \beta)$  und  $G_{\text{ds}}(x, \beta)$ , dann soll das Produkt bedeuten, dass nur die jeweils über den Namenszusatz abc die paarweise korrespondierenden Funktionen multipliziert werden; es ist kein kartesisches Produkt aller Elemente beider Mengen (Klassen):

$$H_{\text{ds}}(x, \beta) = F_{\text{ds}}(x, \beta) \cdot G_{\text{ds}}(x, \beta) \quad :\iff \quad \forall \text{abc} : H_{\text{ds},\text{abc}}(x, \beta) = F_{\text{ds},\text{abc}}(x, \beta) \cdot G_{\text{ds},\text{abc}}(x, \beta)$$

Im folgenden werden wieder fünf konkrete Darstellungen aufgelistet, wobei sich eine kleine Überraschung für die Wurzelarstellung ergibt:

$$X_{\text{ds},\text{tanh}}(x, \beta) = \frac{1}{\beta} \ln(\cosh(\beta x)) \tanh(\beta x)$$

$$X_{\text{ds},\text{arctan}}(x, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \left( x \arctan\left(\frac{\pi}{2}\beta x\right) - \frac{1}{\pi\beta} \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\beta^2 x^2\right) \right) \arctan\left(\frac{\pi}{2}\beta x\right)$$

$$X_{\text{ds},\text{sqrt}}(x, \beta) = x$$

$$X_{\text{ds},\text{Fermi}}(x, \beta) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{2}{1 + e^{-2\beta x}} - 1 \right) (\ln(1 + e^{2\beta x}) - \beta x)$$

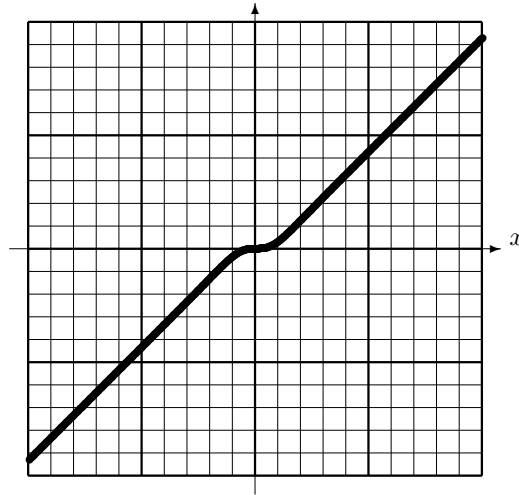
$$X_{\text{ds},\text{arsinh}}(x, \beta) = \frac{1}{\beta} \frac{\sinh(\beta x)}{\sqrt{\cosh^2(\beta x) + 1}} \cdot \operatorname{arsinh}(\cosh(\beta x))$$

Die graphische Darstellung bezieht sich wieder auf die Tangens–hyperbolicus–Darstellung:

$$X_{\text{ds,tanh}}\left(x, \frac{1}{u}\right)$$

$$x \in [-10, +10] \text{ u,}$$

$$y \in [-10, +10] \text{ u}$$



### 3.8 Einsfunktionen

Die Funktionenklasse der Einsfunktionen ist die Differentialableitung der  $X$ -Funktionen nach  $x$ :

$$1_{\text{ds}}(x, \beta) := \{ \partial_x X_{\text{ds}}(x, \beta) \}$$

Daraus ergibt sich mit der Produktregel für das Differenzieren:

$$1_{\text{ds}} = S_{\text{ds}}^2 + 2A_{\text{ds}}\delta_{\text{ds}}$$

Durch Einsetzen der konkreten Darstellungen oder durch direktes Differenzieren ergeben sich die folgenden Funktionen:

$$1_{\text{ds,tanh}}(x, \beta) = \tanh^2(\beta x) + (1 - \tanh^2(\beta x)) \ln(\cosh(\beta x))$$

$$1_{\text{ds,arctan}}(x, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \arctan^2\left(\frac{\pi}{2}\beta x\right) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}\beta^2 x^2} \left( \beta x \arctan\left(\frac{\pi}{2}\beta x\right) - \frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\beta^2 x^2\right) \right)$$

$$1_{\text{ds},\text{sqrt}}(x, \beta) = 1$$

$$1_{\text{ds},\text{Fermi}}(x, \beta) = \tanh^2(\beta x) + \frac{1}{\cosh^2(\beta x)} (\ln(1 + e^{2\beta x}) - \beta x)$$

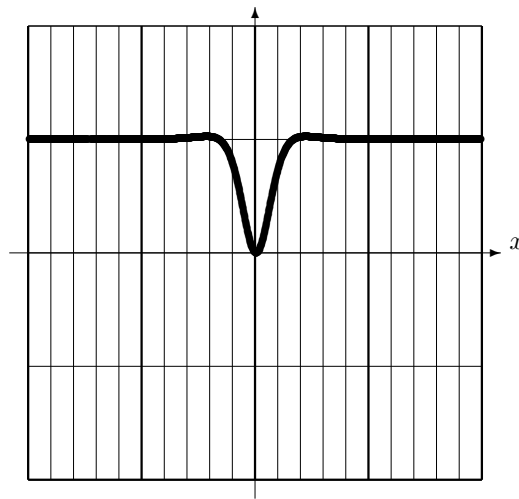
$$1_{\text{ds},\text{arsinh}}(x, \beta) = \frac{\sinh^2(\beta x)}{\cosh^2(\beta x) + 1} + 2 \frac{\cosh(\beta x)}{\sqrt{\cosh^2(\beta x) + 1}^3} \cdot \text{arsinh}(\cosh(\beta x))$$

Der Graph der Tangens-hyperbolicus-Darstellung ist:

$$1_{\text{ds},\text{tanh}}\left(x, \frac{1}{u}\right)$$

$$x \in [-10, +10] \text{ u,}$$

$$y \in [-2, +2]$$



### 3.9 Nullfunktionen

Die erneute Anwendung der Differentialableitung nach der Variablen  $x$  ergibt die Klasse der Nullfunktionen:

$$0_{\text{ds}}(x, \beta) := \{ \partial_x 1_{\text{ds}}(x, \beta) \} = \{ \partial_x^2 X_{\text{ds}}(x, \beta) \}$$

Das Differenzieren liefert hier:

$$0_{\text{ds}} = 6 S_{\text{ds}} \delta_{\text{ds}} + 2 A_{\text{ds}} Z_{\text{ds}}$$

Die fünf konkreten Darstellungen ergeben:

$$0_{\text{ds,tanh}}(x, \beta) = \beta \tanh(\beta x) \cdot (1 - \tanh^2(\beta x)) \cdot (3 - 2 \ln(\cosh(\beta x)))$$

$$0_{\text{ds,arctan}}(x, \beta) = -\pi\beta \frac{\beta x}{\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\beta^2 x^2\right)^2} \left( \beta x \arctan\left(\frac{\pi}{2}\beta x\right) - \frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\beta^2 x^2\right) \right) \dots$$

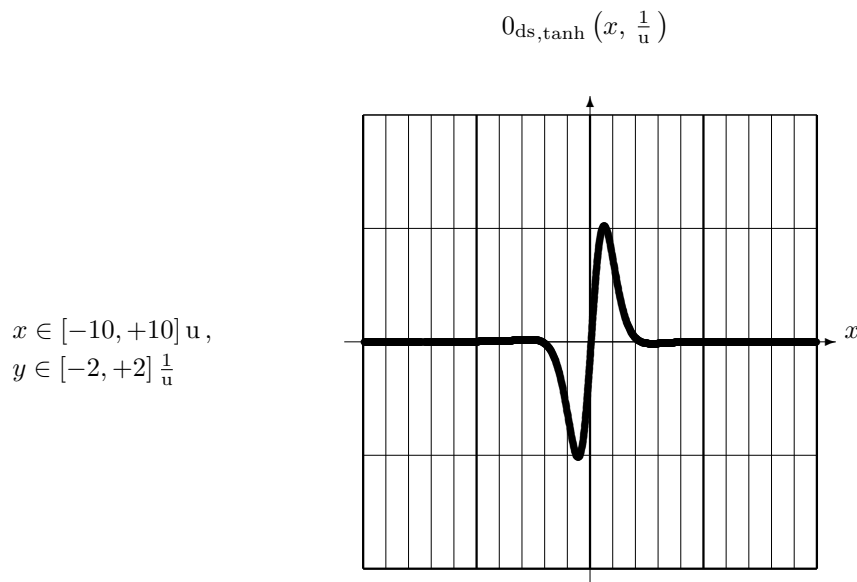
$$+ \frac{6}{\pi}\beta \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}\beta^2 x^2} \arctan\left(\frac{\pi}{2}\beta x\right)$$

$$0_{\text{ds,sqrt}}(x, \beta) = 0$$

$$0_{\text{ds,Fermi}}(x, \beta) = \beta \frac{\tanh(\beta x)}{\cosh^2(\beta x)} (3 - 2 (\ln(1 + e^{2\beta x}) - \beta x))$$

$$0_{\text{ds,arsinh}}(x, \beta) = 2\beta \frac{\sinh(\beta x)}{(\cosh^2(\beta x) + 1)^2} \cdot \left( 3 \cosh(\beta x) + \frac{\text{arsinh}(\cosh(\beta x))}{\sqrt{\cosh^2(\beta x) + 1}} \cdot (1 - 2 \cosh^2(\beta x)) \right)$$

Der Graph zeigt die Abweichungen von Null in der Nähe des Nullpunktes bei der Tangenshyperbolicus-Funktion:



### 3.10 Asymptotische Logarithmen

Die asymptotischen Logarithmen werden mit Hilfe der differentiell superkontinuierlichen Abstandsfunktionen  $a_{\text{ds}}(x, \beta)$  definiert, die keine Nullstelle haben und im Nullpunkt eine positive untere Grenze haben:

$$\text{Ln}_{\text{ds}}(x, \beta) := \ln \left( \frac{1}{u} a_{\text{ds}}(x, \beta) \right)$$

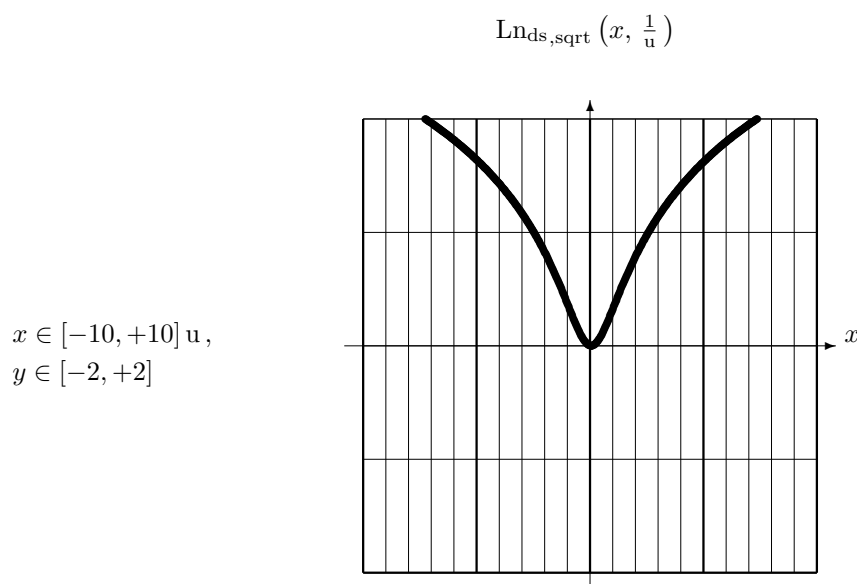
Hier ist  $u$  die abstrakte physikalische Einheit zu der Variablen  $x$ . Drei der fünf Abstandsfunktionen haben die geforderten Eigenschaften:

$$\text{Ln}_{\text{ds,sqrt}}(x, \beta) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{\beta^2 u^2} (\beta^2 x^2 + 1) \right)$$

$$\text{Ln}_{\text{ds,Fermi}}(x, \beta) = \ln \left( \frac{1}{\beta u} (\ln(1 + e^{2\beta x}) - \beta x) \right)$$

$$\text{Ln}_{\text{ds,arsinh}}(x, \beta) = \ln \left( \frac{1}{\beta u} \text{arsinh}(\cosh(\beta x)) \right)$$

Die folgende Graphik zeigt den Verlauf der Quadratwurzel-Darstellung:



### 3.11 Asymptotische Inverse der Multiplikation

Durch Differenzieren nach der Variablen  $x$  der asymptotischen Logarithmen erhalten wir asymptotische Inverse bezüglich der Multiplikation:

$$\text{Inv}_{\text{ds}}(x, \beta) := \{ \partial_x \text{Ln}_{\text{ds}}(x, \beta) \}$$

Die drei konkreten Darstellungen sind:

$$\text{Inv}_{\text{ds},\text{sqrt}}(x, \beta) = \beta \cdot \frac{\beta x}{\beta^2 x^2 + 1}$$

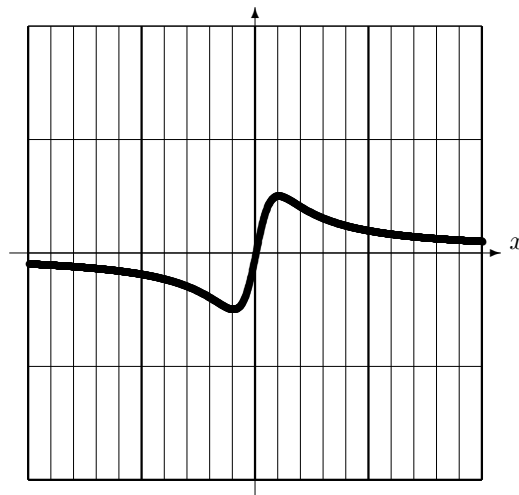
$$\text{Inv}_{\text{ds},\text{Fermi}}(x, \beta) = \beta \cdot \frac{\tanh(\beta x)}{\ln(1 + e^{2\beta x}) - \beta x}$$

$$\text{Inv}_{\text{ds},\text{arsinh}}(x, \beta) = \beta \cdot \frac{\sinh(\beta x)}{\sqrt{\cosh^2(\beta x) + 1} \cdot \text{arsinh}(\cosh(\beta x))}$$

Der folgende Graph zeigt den Verlauf der Quadratwurzel-Darstellung um den Nullpunkt herum:

$$\text{Inv}_{\text{ds},\text{sqrt}}\left(x, \frac{1}{u}\right)$$

$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-2, +2] \frac{1}{u}$$





# Kapitel 4

## Bearbeiten von Funktionen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Werkzeuge definiert, die es ermöglichen, Funktionen abschnittsweise (d.h. in Intervallen) zu manipulieren und trotzdem differentiell superkontinuierliche Übergänge zu behalten. Zunächst werden multiplikative Operator-Klassen auf Funktionen  $f(x)$  definiert. Ihre Anwendung wird danach anhand von Beispielen erläutert.

### 4.1 Einschalter

Eine Funktionenklasse der Einschalter, um eine Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $a$  bei positiver Änderung von  $x$  einzuschalten, ergibt sich aus der Translation der Stufenfunktionen auf der  $x$ -Achse:

$$\text{On}_{\text{ds}}(a, x, \beta) := \theta_{\text{ds}}(x - a, \beta)$$

### 4.2 Ausschalter

Eine Funktion  $f(x)$  kann mit einer Funktionenklasse der Ausschalter an der Stelle  $a$  bei positiver Änderung von  $x$  ausgeschaltet werden:

$$\text{Off}_{\text{ds}}(a, x, \beta) := (1 - \theta_{\text{ds}}(x - a, \beta))$$

Die Anwendung jeder Schaltfunktion auf nach oben und nach unten beschränkte Funktionen ist unproblematisch, da jeder Schalter in der Lage ist, eine beschränkte Funktion



asymptotisch auf Null zu drücken. Anders verhält es sich jedoch bei unbeschränkten Funktionen: Die Tangens–hyperbolicus–Darstellung bzw. die Fermi–Darstellung ist aufgrund des exponentiellen Verhaltens in der Lage, endliche Potenzreihen auf Null zu drücken. Falls jedoch eine Funktion geschaltet werden soll, die z.B. asymptotisch für  $x \rightarrow +\infty$  gegen  $e^{kx}$  konvergiert, so muss der Parameter  $\beta > k$  sein, um diese Funktion asymptotisch auf Null zu bringen.

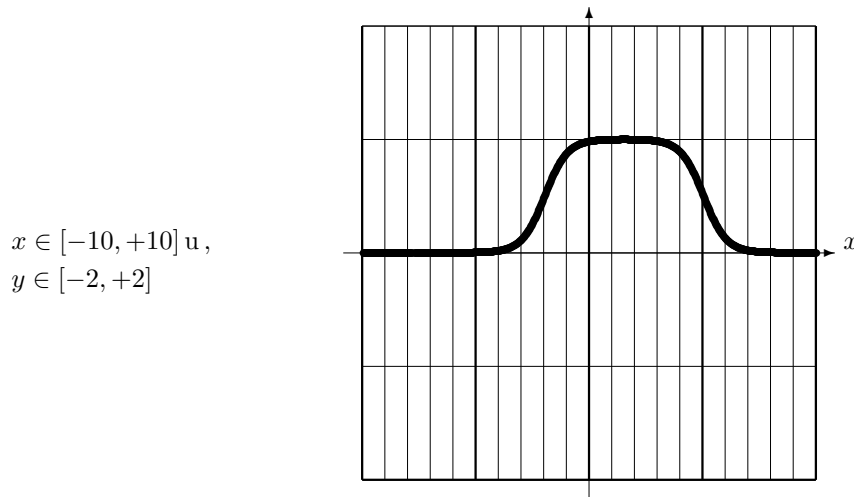
### 4.3 Herausgreifen eines Intervalls

Ein differentiell superkontinuierliches Herausgreifen eines Intervalls zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  geschieht durch die Operatorenklasse

$$\text{Get}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) := \text{On}_{\text{ds}}(a, x, \beta) - \text{On}_{\text{ds}}(b, x, \beta)$$

Diese Greiffunktionen haben die in der folgenden Graphik dargestellten Form:

$$\text{Get}_{\text{ds}, \tanh}(-2u, 5u, x, \frac{1}{u})$$



## 4.4 Hakenfunktionen

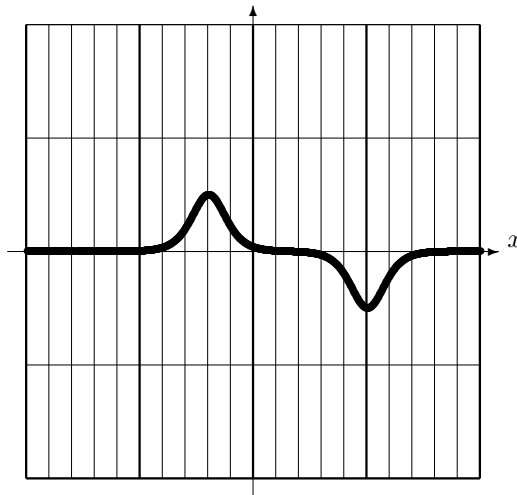
Die Hakenfunktionen ergeben sich durch die Differentialableitung der Greiffunktionen nach der Variablen  $x$ :

$$\text{Hook}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) := \{ \partial_x \text{Get}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) \} = (\delta_{\text{ds}}(x - a, \beta) - \delta_{\text{ds}}(x - b, \beta))$$

Die Graphik zeigt das Verhalten der Änderungen der Greiffunktionen insbesondere in den Umgebungen der Intervallgrenzen  $a$  und  $b$ :

$$\text{Hook}_{\text{ds}, \tanh}(-2u, 5u, x, \frac{1}{u})$$

$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-2, +2] \frac{1}{u}$$

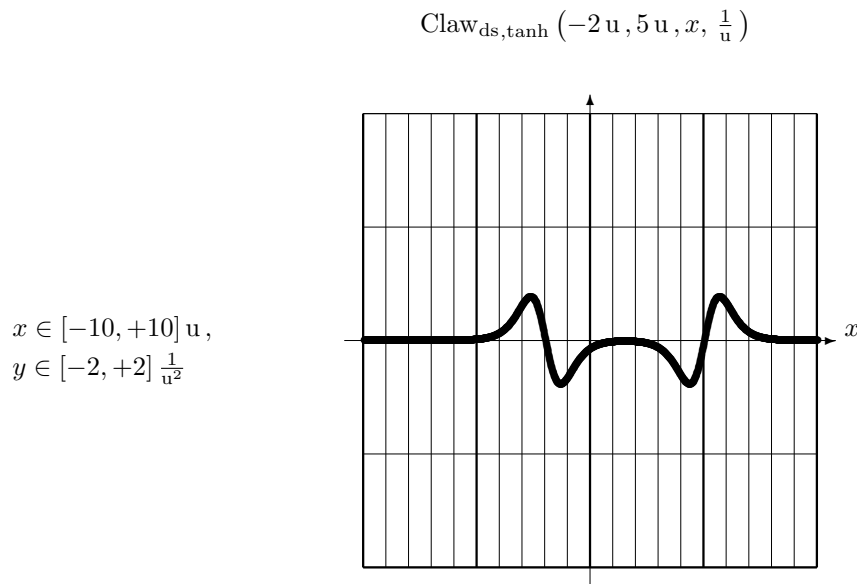


## 4.5 Krallenfunktionen

Die Krallenfunktionen entstehen wiederum durch Differentialableitung der Hakenfunktionen nach  $x$ :

$$\text{Claw}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) := \{ \partial_x \text{Hook}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) \} = (Z_{\text{ds}}(x - a, \beta) - Z_{\text{ds}}(x - b, \beta))$$

Die Graphik verdeutlicht hier die zweite Ableitung der Greiffunktionen an den Intervallgrenzen:



Wenn beispielsweise  $x$  als eine Zeitvariable  $t$  betrachtet wird, und wenn die zweite Zeitableitung eines herausgegriffenen Intervalls einer Funktion  $f(t)$  betrachtet werden soll, dann treten Terme mit Hakenfunktion und Krallenfunktion auf. Der Parameter  $\beta$  hat die physikalische Einheit einer Frequenz:

$$\begin{aligned} \left\{ \partial_t^2 \text{Get}_{\text{ds}}(a, b, t, \beta) \cdot f(t) \right\} &= \left\{ \partial_t \left( \text{Hook}_{\text{ds}}(a, b, t, \beta) \cdot f(t) + \text{Get}_{\text{ds}}(a, b, t, \beta) \cdot \dot{f}(t) \right) \right\} \\ &= \text{Claw}_{\text{ds}}(a, b, t, \beta) \cdot f(t) \dots \\ &\quad + 2 \cdot \text{Hook}_{\text{ds}}(a, b, t, \beta) \cdot \dot{f}(t) \dots \\ &\quad + \text{Get}_{\text{ds}}(a, b, t, \beta) \cdot \ddot{f}(t) \end{aligned}$$

## 4.6 Ausblenden eines Intervalls

Asymptotisches Ausblenden eines Intervalls  $[a, b]$  ist folgendermaßen möglich:

$$\text{Clr}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) := \text{Off}_{\text{ds}}(a, x, \beta) + \text{On}_{\text{ds}}(b, x, \beta)$$

Dieser Ausdruck kann auch in die folgende Form überführt werden:

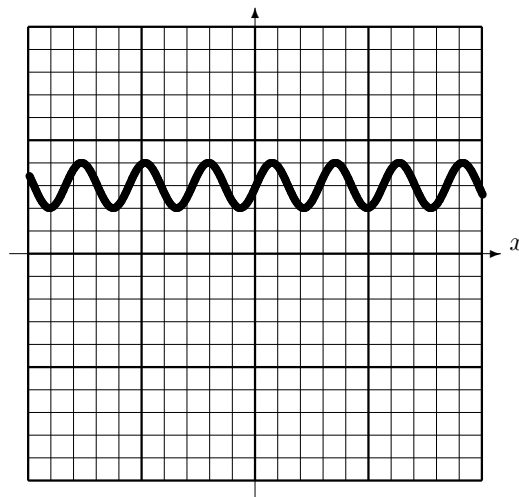
$$\text{Clr}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) = 1 - \text{Get}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta)$$

Mit diesen Begriffen sind jetzt komplexere Operationen auf Funktionen möglich, um diese im asymptotischen Sinne beliebig zu manipulieren. Zur graphischen Veranschaulichung benutze ich die folgenden beiden Funktionen  $f$  und  $g$  als zwei Beispiele in der Rolle als Operanden.

Die Funktion  $f(x)$  sei eine nach oben verschobene Sinusschwingung:

$$f(x) := 3 + \sin\left(\frac{5}{7}\pi \frac{x}{u}\right)$$

$$x \in [-10, +10] \cup, \\ y \in [-10, +10]$$

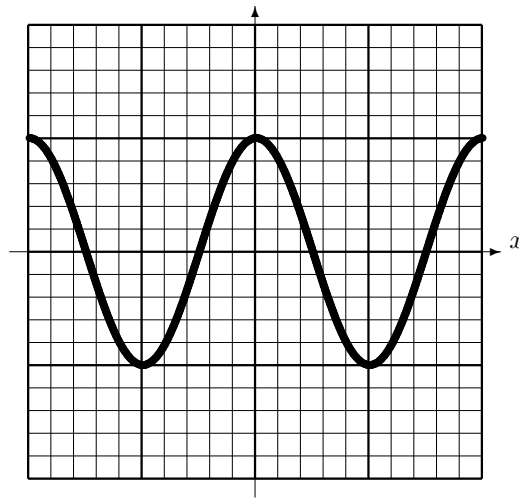


Die Funktion  $g(x)$  sei eine Cosinusschwingung mit größerer Wellenlänge:

$$g(x) := 5 \cdot \cos\left(\frac{1}{5}\pi \frac{x}{u}\right)$$

$$x \in [-10, +10] \text{ u,}$$

$$y \in [-10, +10]$$



## 4.7 Wechsel zwischen zwei Funktionen

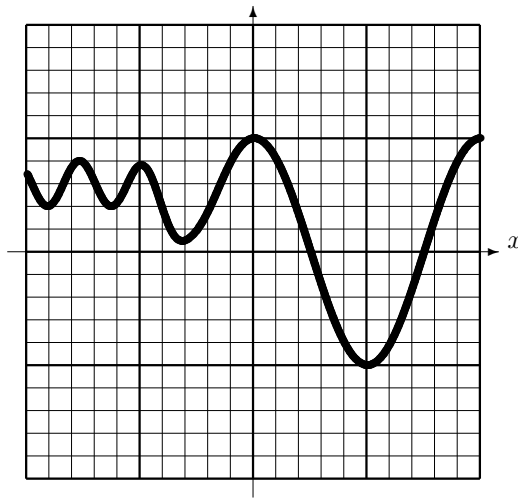
Der Wechsel (engl. “*Change*”) von Funktion  $f(x)$  nach  $g(x)$  an der Stelle  $a$  geschieht durch gleichzeitiges Ausschalten von  $f(x)$  und Einschalten von  $g(x)$  an derselben Stelle  $a$ :

$$\text{Chg}_{\text{ds}}(f, g, a, x, \beta) := \text{Off}_{\text{ds}}(a, x, \beta) \cdot f(x) + \text{On}_{\text{ds}}(a, x, \beta) \cdot g(x)$$

Der folgende Graph zeigt die Wirkung der Tangens–hyperbolicus–Schaltfunktion beim Umschalten zwischen beiden Funktionen an der Stelle  $-3 \text{ u}$ :

$$\text{Chg}_{\text{ds,tanh}} \left( f, g, -3u, x, \frac{1}{u} \right)$$

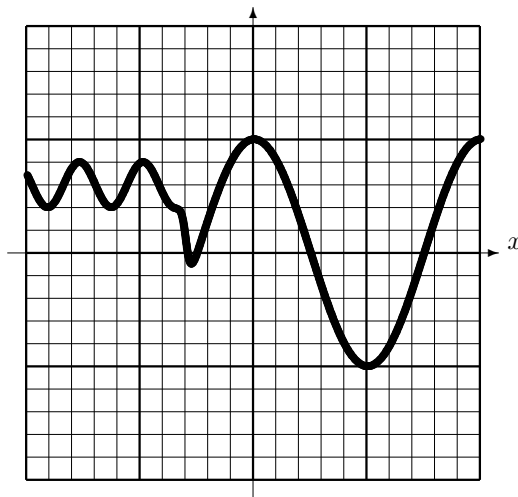
$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-10, +10]$$



Der Parameter  $\beta$  bestimmt, wie stark die beiden Funktionen voneinander getrennt werden sollen. Ist  $\beta \gg 1$ , so liegt eine gute Trennung beider Funktionen vor:

$$\text{Chg}_{\text{ds,tanh}} \left( f, g, -3u, x, 5 \frac{1}{u} \right)$$

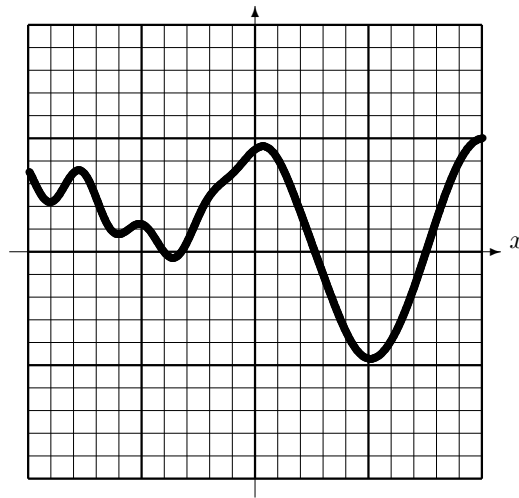
$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-10, +10]$$



Ist jedoch  $0 \leq \beta \ll 1$ , so überlappen sich beide Funktionen sehr stark in der Umgebung des Übergangsbereiches:

$$\text{Chg}_{\text{ds,tanh}} \left( f, g, -3u, x, \frac{1}{5u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-10, +10]$$



Im Spezialfall  $\beta = 0$  sind beide Funktionen für jedes  $x$  zu gleichen Anteilen vorhanden, da der Umschalter den konstanten Wert  $\frac{1}{2}$  hat, denn  $\theta_{\text{ds}}(x, 0) = \frac{1}{2}$ .

## 4.8 Löschen eines Intervalls

Durch die im folgenden definierte Löschoperation ist es möglich, ein Intervall  $[a, b]$  einer Funktion ab der Stelle  $a$  auszublenden und die entstehende Lücke durch Nachziehen der Funktionswerte von rechts nach links bis zum Beginn des Intervalls aufzufüllen:

$$\text{Del}_{\text{ds}}(f, a, b, x, \beta) :=$$

$$\begin{aligned} & \text{Clr}_{\text{ds}} \left( a - \frac{1}{\beta}, a + \frac{1}{\beta}, x, \beta \right) \cdot f(x) + \dots \\ & \dots \text{Off}_{\text{ds}}(a, x, \beta) \cdot f(x) + \text{On}_{\text{ds}}(a, x, \beta) \cdot \text{Shift}_x(f, -(b-a), x) + \dots \\ & \dots \text{Get}_{\text{ds}} \left( a - \frac{1}{\beta}, a + \frac{1}{\beta}, x, \beta \right) \cdot \text{LI} \left( f, a - \frac{2}{\beta}, b + \frac{2}{\beta}, x \right) \end{aligned}$$

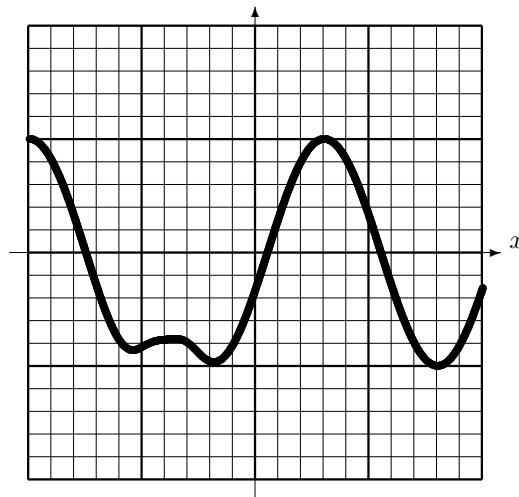
Zunächst wird mit dem Löschoperator  $\text{Clr}_{\text{ds}}$  eine Lücke in einer Umgebung der Stelle  $a$  geschaffen. Die Funktion  $f$  wird an der Stelle  $a$  ausgeschaltet. Gleichzeitig wird ihre Verschiebung nach links an der Stelle  $a$  eingeschaltet. Die abschließende lineare Interpolation  $\text{LI}$  soll eventuelle Spitzen bei den Anschlussstellen minimieren.

Die folgende Graphik zeigt, dass aus der Funktion  $g(x)$  ab der Stelle  $a$  das Intervall  $[a, b]$

mit Hilfe des Tangens hyperbolicus herausgelöscht worden ist. Der rechte Funktionsteil ab  $b$  wurde dabei um  $(b - a)$  nach links verschoben:

$$\text{Del}_{\text{ds,tanh}}(g, -4u, 3u, x, \frac{1}{u})$$

$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-10, +10]$$



## 4.9 Einfügen von Leerraum

Die folgende Operationenklasse fügt ein Intervall mit asymptotischen Nullen ein, wobei die Funktionswerte ab der Stelle  $a$  um  $b - a$  nach rechts verschoben werden:

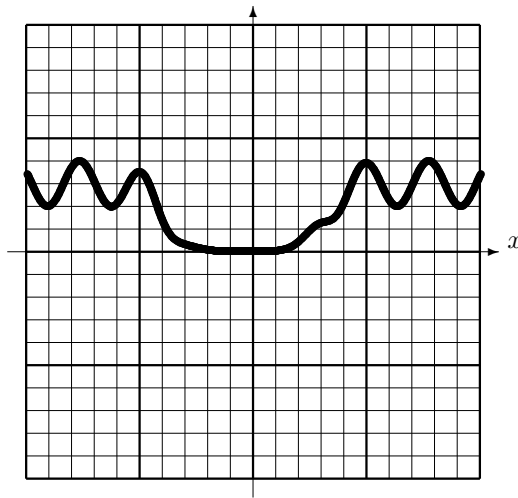
$$\text{InsSp}_{\text{ds}}(f, a, b, x, \beta) := \text{Off}_{\text{ds}}(a, x, \beta) \cdot f(x) + \text{On}_{\text{ds}}(b, x, \beta) \cdot \text{Shift}_x(f, b - a, x)$$

Die Graphik zeigt die Anwendung der Tangens–hyperbolicus–Darstellung der Schalter auf die Funktion  $f(x)$ :



$$\text{InsSp}_{\text{ds,tanh}} \left( f, -4u, 3u, x, \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-10, +10]$$



## 4.10 Kopieren eines Intervalls

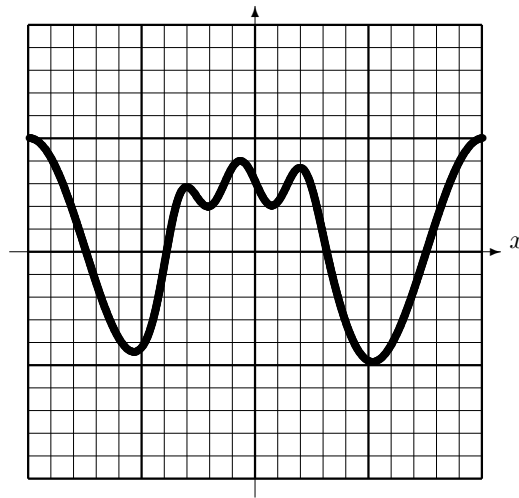
Ein Intervall  $[a_g, b_g]$  des Ziel-Operanden  $g(x)$  wird mit dem gleich langen Intervall  $[a_f, b_f]$  des Quell-Operanden  $f(x)$  überschrieben:

$$\text{Cpy}_{\text{ds}}(f, g, a_f, b_f, a_g, x, \beta) := \text{Get}_{\text{ds}}(a_g, b_g, x, \beta) \cdot \text{Shift}_x(f, a_g - a_f, x) + \text{Clr}_{\text{ds}}(a_g, b_g, x, \beta) \cdot g(x)$$

Die folgende Graphik zeigt diese Operation mittels der Tangens-hyperbolicus-Schalter:

$$\text{Cpy}_{\text{ds,tanh}}(f, g, 3 \text{ u}, 10 \text{ u}, -4 \text{ u}, x, \frac{1}{u})$$

$$x \in [-10, +10] \text{ u}, \\ y \in [-10, +10]$$



## 4.11 Einfügen eines Intervalls

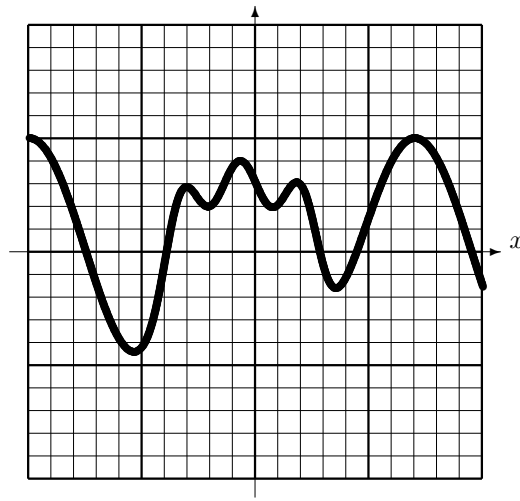
Ein Intervall  $[a_f, b_f]$  mit der Länge  $b_f - a_f$  des Quell-Operanden  $f(x)$  kann ab der Stelle  $a_g$  des Ziel-Operanden  $g(x)$  eingefügt werden, wobei alle Funktionswerte ab  $a_g$  um  $a_g - a_f$  nach rechts verschoben werden:

$$\text{Ins}_{\text{ds}}(f, g, a_f, b_f, a_g, x, \beta) := \text{InsSp}_{\text{ds}}(g, a_g, b_g, x, \beta) + \text{Get}_{\text{ds}}(a_g, b_g, x, \beta) \cdot \text{Shift}_x(f, a_g - a_f, x)$$

Die Graphik zeigt diese Operation anhand der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  unter Benutzung des Tangens hyperbolicus:

$$\text{InS}_{\text{ds,tanh}}(f, g, 3u, 10u, -4u, x, \frac{1}{u})$$

$$x \in [-10, +10]u,$$
$$y \in [-10, +10]$$



# Kapitel 5

## Bügeleisen und Häckselmaschinen

In diesem Abschnitt werden Operationen vorgestellt, die nicht allzu ernst gemeint sind und im Sinne eines differentiell superkontinuierlichen, ganzheitlichen Weltbildes auch nicht verwendet werden sollten. Dieses Kapitel soll lediglich zeigen, wie leicht ein globaler, superkontinuierlicher Zusammenhang durch nicht differentiell superkontinuierliche Mathematik wieder zerstört werden kann.

### 5.1 Glätten von Polstellen

Falls eine Funktion vorliegt, die unglücklicherweise Polstellen von endlichen Graden enthält, können diese mit einer Funktionenklasse der Bügeleisen FI (engl. “*flatiron*”) geglättet werden. Zunächst wird ein Hilfsoperator  $F$  (engl. “*flattener*”) mit Hilfe der Signumsfunktionen  $S_{\text{ds}}(x, \beta)$  definiert, der in der Lage sein soll, eine einzelne Polstelle zu glätten. Dabei machen wir uns zu Nutze, dass sich das Quadrat  $S_{\text{ds}}^2(x, \beta)$  ähnlich wie die Einsfunktionen  $1_{\text{ds}}(x, \beta)$  verhalten.

Sei  $r(x)$  eine gebrochen-rationale Funktion mit genau einer Polstelle  $a$  vom Grade  $k$ .

$$F(k, a, x, \beta) := \begin{cases} S_{\text{ds}}^k((x - a), \beta) & \text{falls } k \text{ gerade} \\ S_{\text{ds}}^{k+1}((x - a), \beta) & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Diese Operation sollte lediglich als eine Notoperation auf eine pathologische Funktion aufgefasst werden. Da diese Operation mindestens eine Definitionslücke an der Polstelle zurückbehält, ist nicht von vornherein klar, ob die Widerspruchsfreiheit zur Differentialrechnung erhalten bleibt.

Sei nun  $r(x)$  eine gebrochen-rationale Funktion mit  $N$  Polstellen  $a_1, \dots, a_N$ . Der Index  $j = 1, \dots, N$  gebe die Nummer der Polstelle  $a_j$  vom Grade  $k_j$  an. Das gesamte Bügeleisen ergibt sich aus dem Produkt aller  $F(k_j, a_j, x, \beta)$ :

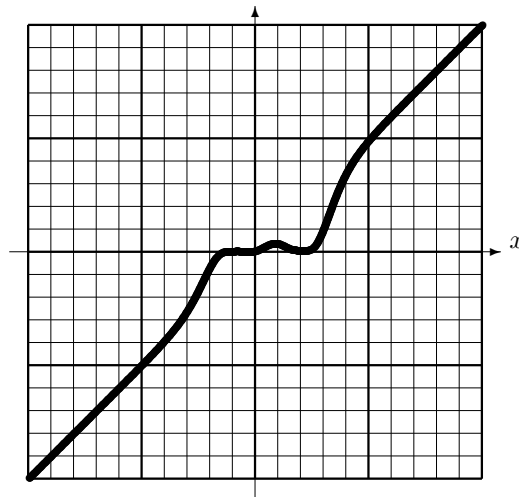
$$\text{FI}(N, k_1, \dots, k_N, a_1, \dots, a_N, x, \beta) := \left\{ \prod_{j=1}^N F(k_j, a_j, x, \beta) \right\}$$

Die folgende Graphik zeigt, wie das Bügeleisen auf eine gebrochen-rationale Funktion mit zwei Polstellen wirkt, wenn der Parameter  $\beta$  den Wert  $\frac{1}{u}$  hat. Die eine Polstelle bei  $x = -1$  ist ungeraden Grades, die andere bei  $x = 2$  ist geraden Grades:

$$r(x) := \frac{1}{(x+1)^3 \cdot (x-2)^4} + x$$

$$\text{FI}(2, 3, 4, -1 \text{ u}, 2 \text{ u}, x, \frac{1}{u}) \cdot r(x)$$

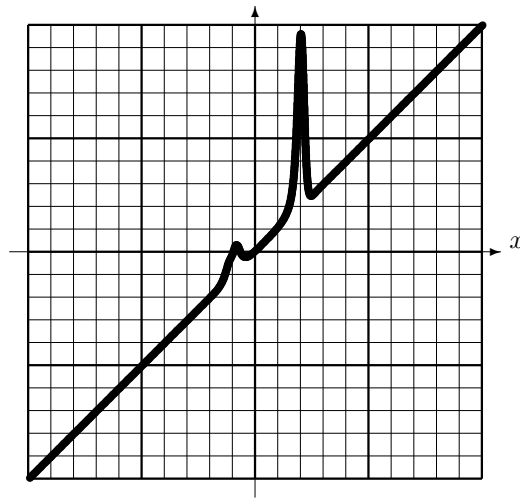
$$x \in [-10, +10] \text{ u}, \\ y \in [-10, +10]$$



Dies entspricht vielleicht noch nicht dem gewünschten Ergebnis, da die ursprüngliche Funktion um den Nullpunkt herum zu stark verfälscht wird. Wir erhöhen deshalb den Parameter vorsichtig auf den Wert  $\beta = 4 \frac{1}{u}$ :

$$\text{FI} \left( 2, 3, 4, -1u, 2u, x, 4\frac{1}{u} \right) \cdot r(x)$$

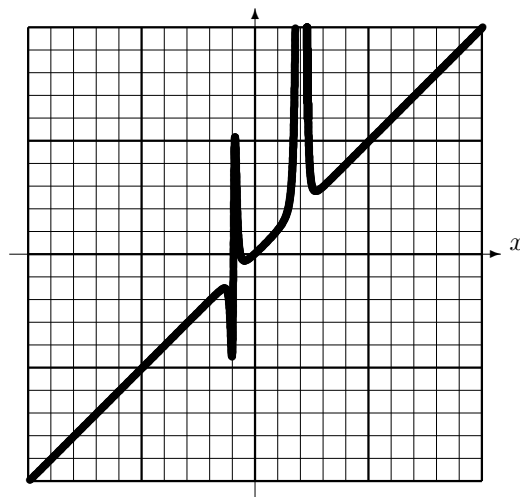
$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-10, +10]$$



Je größer der Parameter  $\beta$  eingestellt wird, desto mehr findet eine Annäherung an den Verläufen der Polstellen statt. Dies zeigt der folgenden Graph mit einem Parameterwert von  $\beta = 10\frac{1}{u}$ :

$$\text{FI} \left( 2, 3, 4, -1u, 2u, x, 10\frac{1}{u} \right) \cdot r(x)$$

$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-10, +10]$$

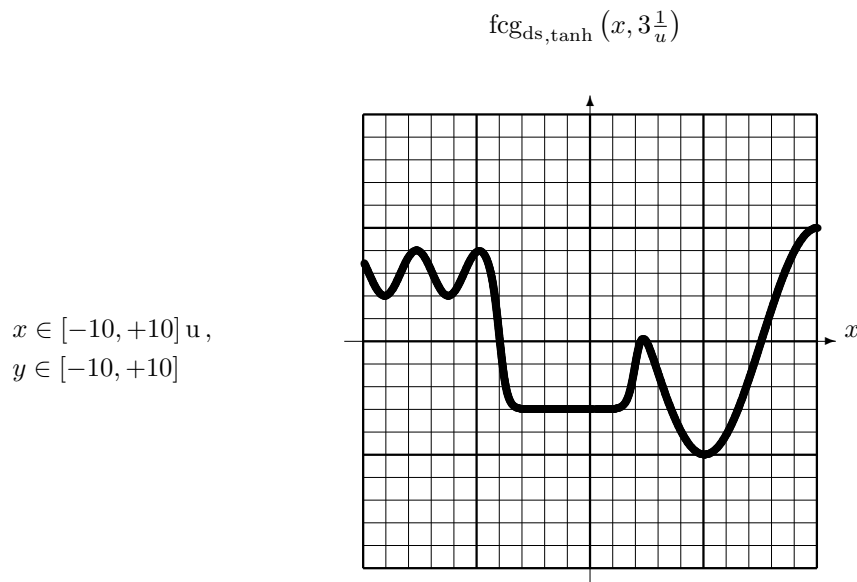


## 5.2 Zerschneiden von Differentiellen Superkontinua

Gehen wir nun von der folgenden differentiell superkontinuierlichen Funktionenklasse aus:

$$fcg_{ds}(x, \beta) := \text{Off}_{ds}(-4u, x, \beta) \cdot f(x) + \text{Get}_{ds}(-4u, 2u, x, \beta) \cdot (-3) + \text{On}_{ds}(2u, x, \beta) \cdot g(x)$$

Im Graphen sehen wir die drei typischen asymptotischen Verhaltensweisen der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  (s. Definitionen auf S. 36) und der Konstantenfunktion  $-3$  mit einem Parameterwert von  $\beta = 3\frac{1}{u}$ :



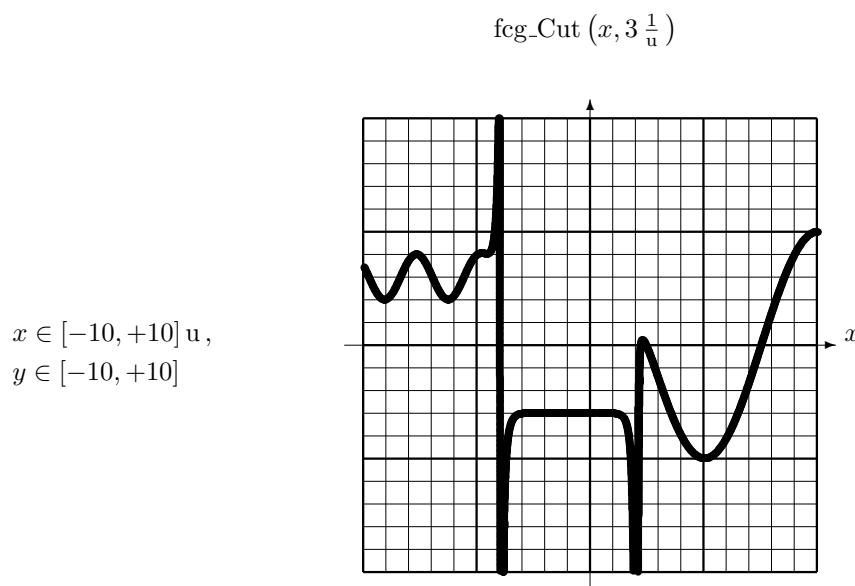
Der Umkehroperator zum Bügeleisen ist die Häckselmaschine. Dazu definieren wir als Hilfsoperator den Umkehroperator des Polstellenglätters  $F$ :

$$\text{Cut}(k, a, x, \beta) := \begin{cases} S_{ds}^{-k}((x-a), \beta) & \text{falls } k \text{ gerade} \\ S_{ds}^{-(k+1)}((x-a), \beta) & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Damit konstruieren wir nun eine allgemeine Funktionen–Häckselmaschine:

$$\text{ChuffCutter}(N, k_1, \dots, k_N, a_1, \dots, a_N, x, \beta) := \left\{ \prod_{j=1}^N \text{Cut}(k_j, a_j, x, \beta) \right\}$$

Die Auswirkungen dieses Operators auf die zusammenhängenden Funktionen aus der Funktionenklasse  $\text{fcg}_{\text{ds}}(x, \beta)$  mit den Parametern  $N = 2$  (Anzahl der Pole),  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$  (Grade der Pole) und den Polstellen  $a_1 = -4u$ ,  $a_2 = 2u$ , die gerade dieselben Stellen wie die Übergangstellen der Funktionenklasse  $\text{fcg}_{\text{ds}}(x, \beta)$  sind, zeigt der folgende Graph:



Nun wird anschaulich klar, dass diese Spielerei doch einen etwas ernsteren Hintergrund haben kann: Nach einer solchen Zerschneidung einer differentiell superkontinuierlichen Funktion erscheinen die zuvor zusammenhängenden Abschnitte als unabhängige Teilabschnitte, die nun scheinbar in keinem Zusammenhang mehr stehen.





# Kapitel 6

## Komplexere Funktionenklassen

Mit den differentiell superkontinuierlichen Operationen ist es grundsätzlich immer möglich, asymptotische Verhaltensweisen, die eine Funktion innerhalb bestimmter Intervalle haben soll, zusammenzubauen, ohne dass nicht-differenzierbare Stellen entstehen. Eine Besonderheit der Operatordefinitionen liegt darin, dass alle definierten Funktionenklassen aus der Funktionenklasse der Absolutbeträge  $A_{\text{ds}}(x, \beta)$  entstanden sind. Im Folgenden werden ein paar einfache Beispiele dargestellt und die Auswirkungen bei Variation des Parameters  $\beta$  betrachtet.

### 6.1 Treppe

Die folgende Funktionenklasse baut eine Anzahl  $N$  Treppenstufen innerhalb des  $x$ -Intervalls  $[a_x, b_x]$  und innerhalb des  $y$ -Intervalls  $[a_y, b_y]$ . Die Einheit der  $x$ -Achse sei  $u$  und die Einheit der  $y$ -Achse sei  $v$ :

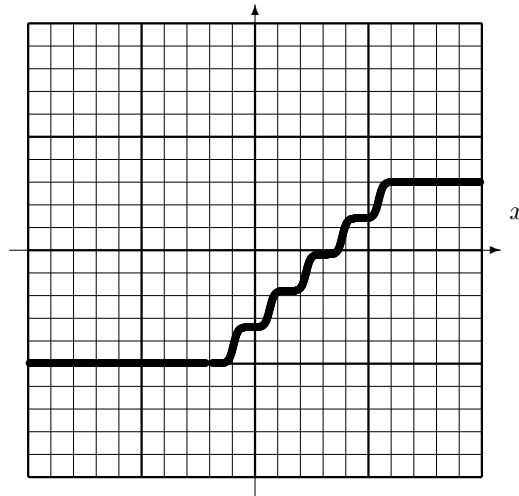
$$\text{Stairs}_{\text{ds}}(N, a_x, b_x, a_y, b_y, x, \beta) := \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \text{Dy} \cdot \text{On}_{\text{ds}}(a_j, x, \beta) \right\}$$

mit  $a_j = j \text{Dx}$ ,  $\text{Dx} = \frac{b_x - a_x}{N}$ ,  $\text{Dy} = \frac{b_y - a_y}{N}$

$$\text{Stairs}_{\text{ds,tanh}} \left( 5, -1u, 7u, -5v, 3v, x, 5 \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u,$$

$$y \in [-10, +10] v$$

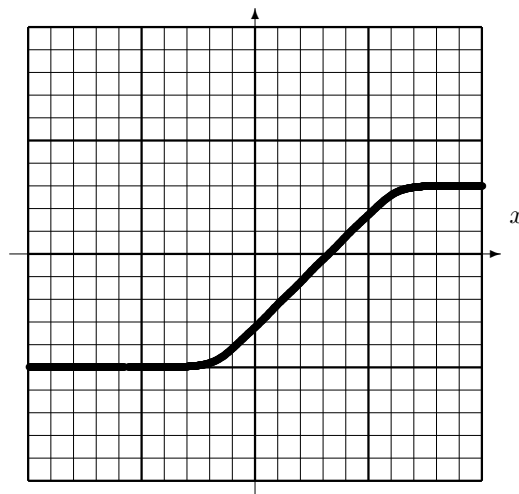


Wird nun der Parameter  $\beta$  von zuvor  $5 \frac{1}{u}$  auf  $\frac{1}{u}$  verringert, so erhalten wir eine Verschmelzung der Stufen zu einer schiefen Ebene:

$$\text{Stairs}_{\text{ds,tanh}} \left( 5, -1u, 7u, -5v, 3v, x, \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u,$$

$$y \in [-10, +10] v$$

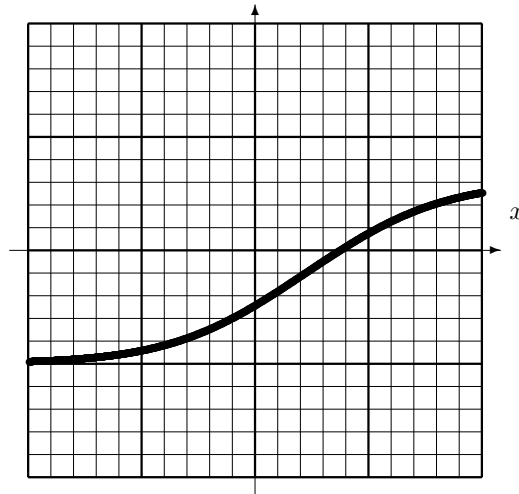


Bei einer weiteren Verringerung von  $\beta$  auf nunmehr  $\frac{1}{5u}$  sind nun auch die der schiefen Ebenen umgebenen Plateaus sichtbar betroffen, so dass sie als solche nicht mehr erkennbar sind:

$$\text{Stairs}_{\text{ds,tanh}} \left( 5, -1u, 7u, -5v, 3v, x, \frac{1}{5u} \right)$$

$$x \in [-10, +10]u,$$

$$y \in [-10, +10]v$$



## 6.2 Sägezähne

Um eine Sägezahnfunktion zu bauen, definieren wir zunächst eine einzelne Zacke  $\text{SST}_{\text{ds}}$  (*“Single Saw-Tooth”*) bei  $a$  beginnend, mit der Breite  $w$  mit der Einheit  $u$  und der Höhe  $h$  mit der Einheit  $v$ :

$$\text{SST}_{\text{ds}}(a, w, h, x, \beta) := \frac{h}{w} \text{Get}_{\text{ds}}(a, a + w, x, \beta) \cdot (x - a)$$

Durch die Summe von  $N$  translatierten Einzelzacken erhalten wir innerhalb des Intervalls  $[a_x, b_x]$  eine Sägezahnfunktion  $\text{ST}_{\text{ds}}$  (*“Saw-Tooth”*):

$$\text{ST}_{\text{ds}}(N, a_x, b_x, h, x, \beta) := \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \text{SST}_{\text{ds}}(a_j, w, h, x, \beta) \right\}$$

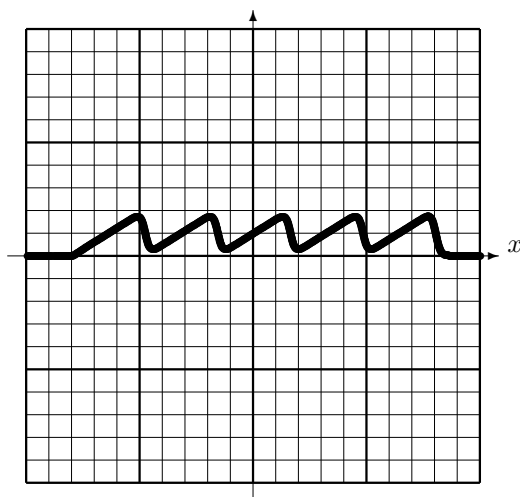
mit  $w = \frac{b_x - a_x}{N}$  und  $a_j = a_x + jw$

Der Graph zeigt mit dem Parameter  $\beta = 5 \frac{1}{u}$  relativ scharfe Zacken:

$$ST_{ds,\tanh} \left( 5, -8u, 8u, 2v, x, 5 \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u,$$

$$y \in [-10, +10] v$$

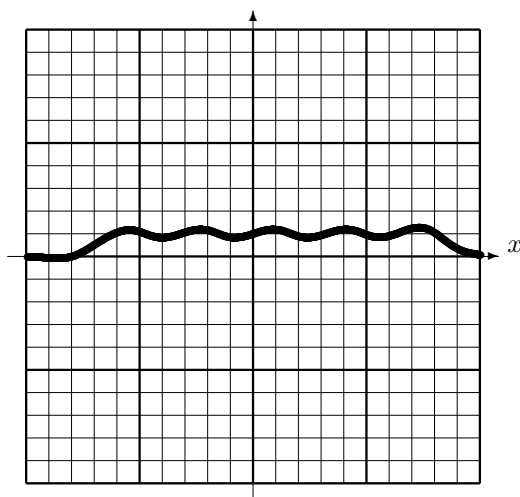


Das Verringern von  $\beta$  lässt die Zacken immer stumpfer werden ...

$$ST_{ds,\tanh} \left( 5, -8u, 8u, 2v, x, \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u,$$

$$y \in [-10, +10] v$$

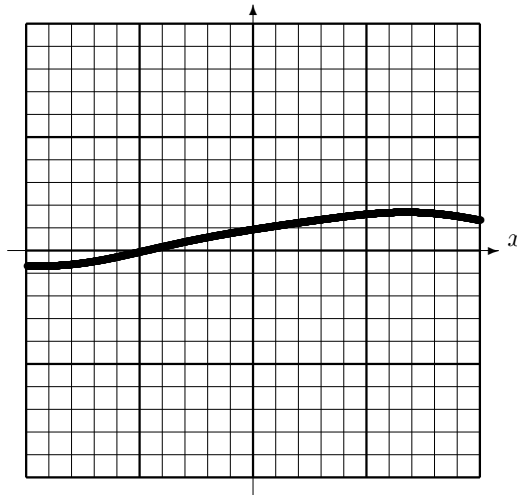


... bis schließlich keine Zacke mehr erkennbar ist:

$$ST_{ds,tanh} \left( 5, -8u, 8u, 2v, x, \frac{1}{5u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u,$$

$$y \in [-10, +10] v$$



### 6.3 Kammfunktionen

Durch eine Summe äquidistant verschobener Delta-Funktionen erhalten wir eine Kammfunktion:

$$\text{Comb}_{ds}(N, a, b, x, \beta) := \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{ds}(x - a_j, \beta) \right\}$$

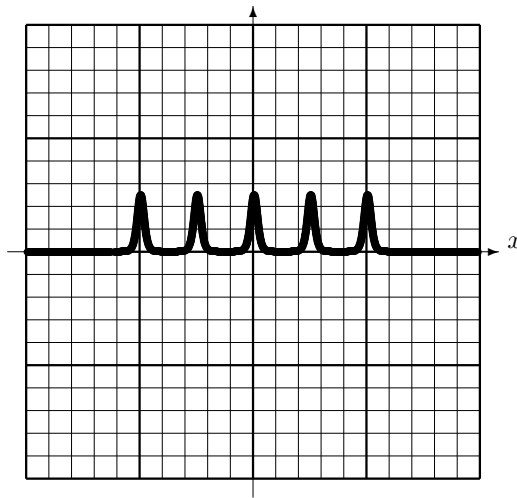
mit  $w := \frac{b-a}{N-1}$  und  $a_j := a + jw$

wobei  $N \geq 2$  die Anzahl der Delta-Zacken innerhalb des Intervalls  $[a, b]$  ist. Innerhalb des abgeschlossenen Intervalls liegen nur die Maxima der Delta-Zacken; die Ausläufer reichen natürlich aus diesem Intervall heraus:

$$\text{Comb}_{\text{ds,tanh}} \left( 5, -5u, 5u, x, 5 \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u,$$

$$y \in [-10, +10] \frac{1}{u}$$

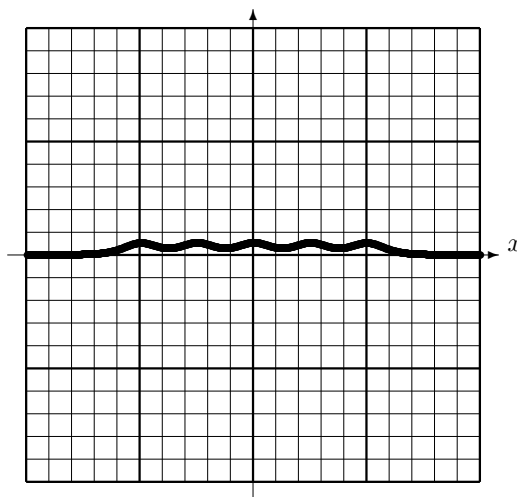


Wird der Parameter wieder drastisch verringert, wie in diesem Beispiel auf  $\frac{1}{u}$ , so überlagern sich die einzelnen Delta-Spitzen sehr viel deutlicher:

$$\text{Comb}_{\text{ds,tanh}} \left( 5, -5u, 5u, x, \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u,$$

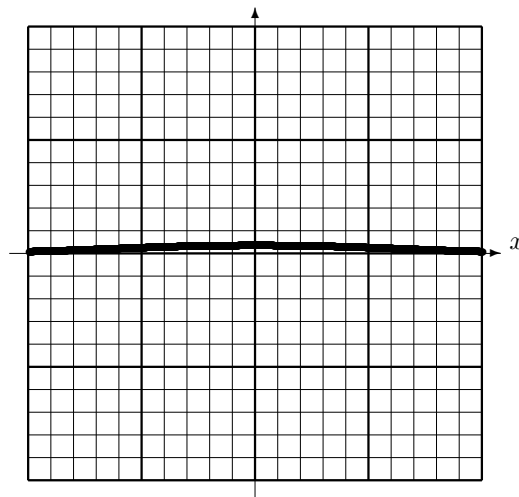
$$y \in [-10, +10] \frac{1}{u}$$



Nach einer weiteren Verringerung auf  $\frac{1}{5u}$  bleibt nur eine kaum erkennbare, flache Erhebung übrig:

$$\text{Comb}_{\text{ds,tanh}} \left( 5, -5u, 5u, x, \frac{1}{5u} \right)$$

$$\begin{aligned} x &\in [-10, +10] u, \\ y &\in [-10, +10] \frac{1}{u} \end{aligned}$$



Ein interessanter Effekt ergibt sich, wenn bei konstantem Parameter  $\beta$  die einzelnen Delta-Zacken immer enger zusammengerückt werden. Als Beispiel nehmen wir einen Delta-Kamm mit 10 Einzelzacken. Der Parameter sei immer  $\beta = 5 \cdot \frac{1}{u}$ . Das Darstellungsintervall der Funktionswerte sei immer  $y \in [-15, +15] \frac{1}{u}$ .

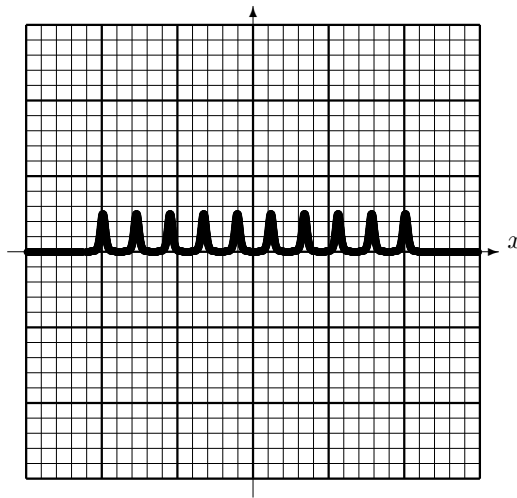
In der Anfangssituation seien die 10 Delta-Zacken im  $x$ -Intervall  $[-10, +10] u$ :



$$\text{Comb}_{\text{ds,tanh}} \left( 10, -10 u, +10 u, x, 5 \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-15, +15] u,$$

$$y \in [-15, +15] \frac{1}{u}$$

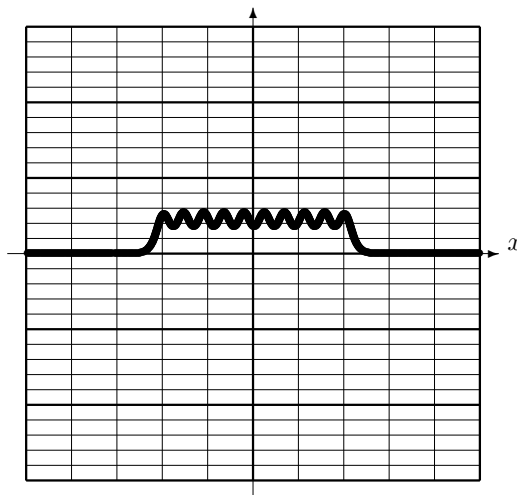


Die einzelnen Delta-Zacken scheinen sich scharf von jeder anderen Delta-Zacke abzugrenzen. Diese Situation ändert sich jedoch, sobald sie enger zusammengerückt werden. In der folgenden Situation sind sie um den Faktor  $\frac{1}{5}$  dichter zusammengerückt worden. Sie befinden sich nun im Intervall  $[-2, +2] u$  und beginnen sich, deutlicher zu überlagern. Die Darstellungen der folgenden Graphen ist bezüglich der  $x$ -Achse gedehnt worden:

$$\text{Comb}_{\text{ds,tanh}} \left( 10, -2 u, +2 u, x, 5 \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-5, +5] u,$$

$$y \in [-15, +15] \frac{1}{u}$$



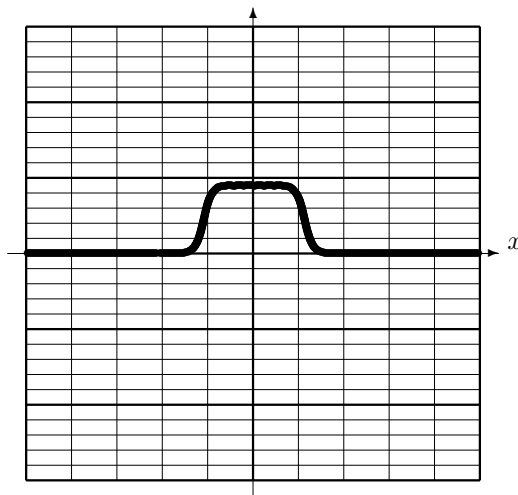
Durch diese Überlagerungen entsteht bei geeignetem Abstand offensichtlich ein wellenähnliches Muster. Nun kommen wir zu einem weiteren Spezialfall, indem wir den Abstand um

den Faktor  $\frac{1}{2}$  verringern. Damit entspricht der Abstand zweier benachbarter Delta-Zacken etwa dem Kehrwert des Parameters  $\beta$ , also  $dx = \frac{2}{9} u \approx \frac{1}{\beta} = \frac{1}{5} u$ :

$$\text{Comb}_{\text{ds,tanh}} \left( 10, -1 u, +1 u, x, 5 \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-5, +5] u,$$

$$y \in [-15, +15] \frac{1}{u}$$

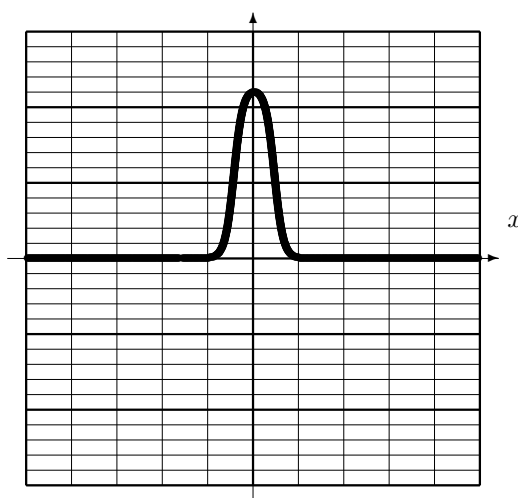


Nähern sich die Delta-Zacken nocheinmal um den Faktor  $\frac{2}{5}$  an, so verschmelzen sie zu einem nach oben gewölbten Buckel:

$$\text{Comb}_{\text{ds,tanh}} \left( 10, -0.4 u, +0.4 u, x, 5 \frac{1}{u} \right)$$

$$x \in [-5, +5] u,$$

$$y \in [-15, +15] \frac{1}{u}$$



Spätestens an dieser Stelle drängen sich die folgende Fragen auf: Welche Auswirkungen sind auf die Theoretische Elementarteilchenphysik zu erwarten, wenn nicht die sog. Dirac'sche  $\delta$ -Funktion, sondern die differentiell superkontinuierliche  $\delta_{ds}$ -Funktionsklasse beispielsweise die Ladungsverteilung oder die Masseverteilung eines Elementarteilchens besser beschreibt? Angenommen, die Ladungsdichteverteilung eines Elektrons ließe sich durch eine Funktion aus der Klasse der differentiell superkontinuierlichen  $\delta_{ds}$ -Funktionen ausdrücken. Dann erschiene eine Anzahl  $N$  äquidistanter und in einer Dimension aufgereihter Elektronen in großem Abstand  $dx \gg \frac{1}{\beta}$  wie eigenständige, unabhängige Teilchen, im Abstand  $dx \approx \frac{2}{\beta}$  wie ein Wellenzug, im Abstand  $dx \approx \frac{1}{\beta}$  wie ein Plateau oder Wall und bei Abständen  $dx \ll \frac{1}{\beta}$  wie ein neues zusammengesetztes Teilchen mit dem Grenzfall bei  $dx = 0$ , das in diesem Grenzfall genau das  $N$ -fache der angenommenen  $\delta_{ds}$ -Funktion ergibt.

Die dargelegten Verschmelzungseffekte sind mit dem Dirac'schen  $\delta$ -Kamm nicht möglich, da die  $\delta$ -Zacken nach Dirac unendlich dünn sind und sich beim Zusammenschieben nicht überlagern können.

## 6.4 Gleichrichterfunktionen

Die Funktionen aus der Klasse der positiven Halbachsen  $R_{ds}(x, \beta)$  haben große Ähnlichkeit mit der Spannungs-Strom-Kennlinie einer Serienschaltung aus einer Diode und einem Widerstand. Um dies zu zeigen, sei  $x$  eine zeitabhängige periodische Funktion. Als Basiseinheiten seien  $u$  die Maßeinheit für  $x$  und  $\tau$  die Zeiteinheit:

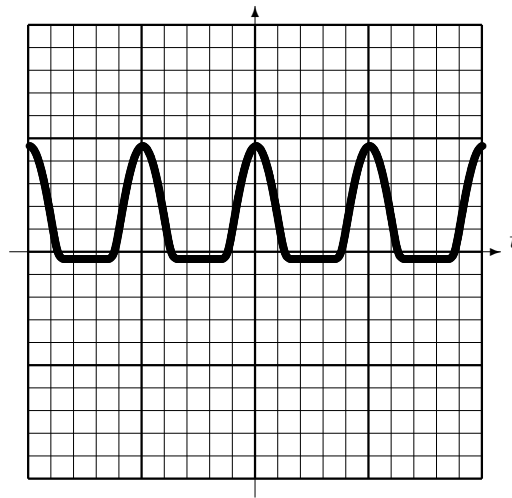
$$x(t) := A \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad A := 5 u \quad \text{und} \quad \omega := \frac{4\pi}{\tau}$$

Im folgenden Graph ist die Tangens-hyperbolicus-Diode dargestellt:

$$R_{\text{ds,tanh}}\left(x(t), \frac{1}{u}\right)$$

$$t \in [-1, +1] \tau,$$

$$y \in [-10, +10] u$$



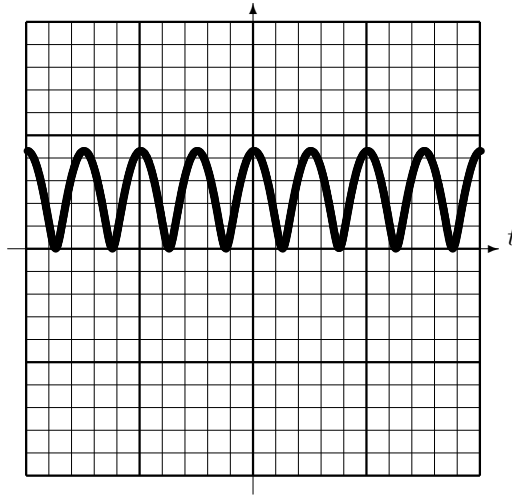
Ein bemerkenswertes Detail ist, dass die Tangens–hyperbolicus–Darstellung und die Arcustangens–Darstellung einer differentiell superkontinuierlichen positiven Halbachse, abschnittsweise leicht negativ werden, falls das Eingangssignal  $x(t)$  negativ ist. Mit den Funktionen  $R_{\text{ds,tanh}}$  und  $R_{\text{ds,arctan}}$  kann also das Verhalten einer Serienschaltung einer Diode mit einem Widerstand nachgebildet werden. Das Eingangssignal ist die elektrische Spannung  $U(t) = x(t)$ , die Reaktion darauf ist der elektrische Strom  $I(t) = \frac{I_u}{U_u} R_{\text{ds,tanh}}(U(t), \beta)$ , wobei  $I_u$  und  $U_u$  die Einheiten für den elektrischen Strom bzw. die elektrische Spannung sind.

Die Funktionenklasse der Absolutbeträge wirkt hingegen als Brückengleichrichter:

$$A_{\text{ds,tanh}}\left(x(t), \frac{1}{u}\right)$$

$$t \in [-1, +1] \tau,$$

$$y \in [-10, +10] u$$

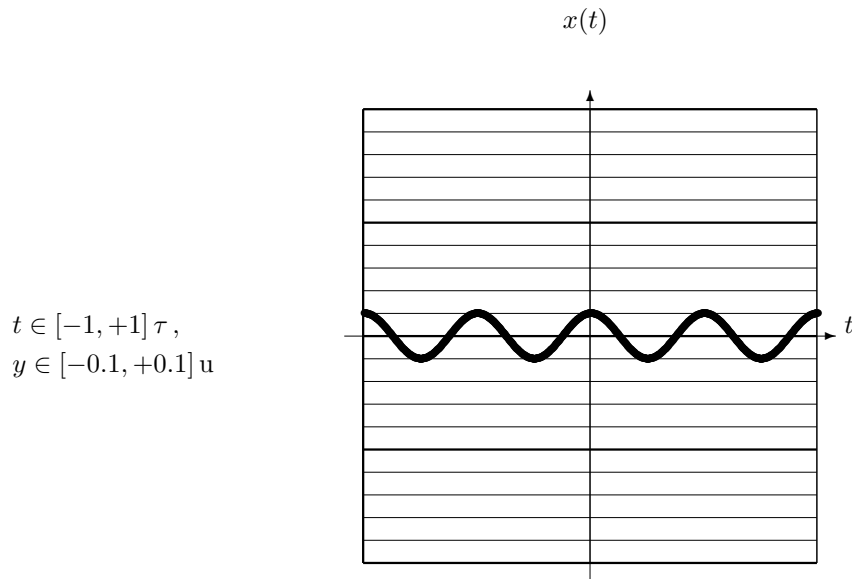


## 6.5 Verstärkerfunktionen

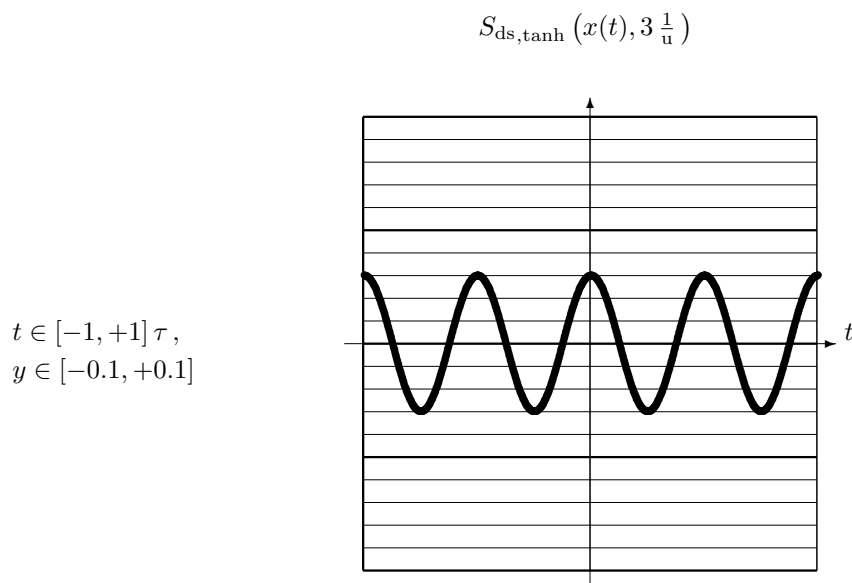
Die differentiell superkontinuierlichen Signumsfunktionen können sehr kleine Signale verstärken, wenn die Amplitude  $A$  des Eingangssignals sehr klein gegenüber  $u$  und der Parameter  $\beta$  größer als  $\frac{1}{u}$  ist. Das Eingangssignal sei eine einfache Cosinusfunktion:

$$x(t) := A \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad A := \frac{1}{100} u, \quad \omega := \frac{4\pi}{\tau}$$

Der folgende Graph zeigt zunächst das Eingangssignal. Eine Skaleneinheit auf der  $y$ -Achse bedeutet in den folgenden Graphen  $\frac{1}{100} u$ :



Das durch die differentiell superkontinuierliche Signumsfunktion  $S_{\text{ds,tanh}}(x(t), \beta)$  mit  $\beta = 3 \cdot \frac{1}{\text{u}}$  verstärkte Signal zeigt der folgende Graph:

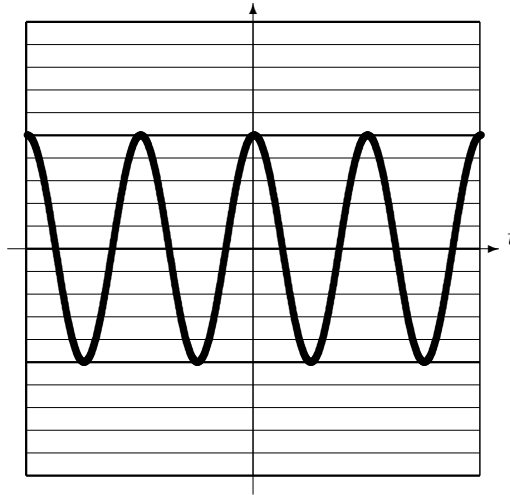


Wegen der unterschiedlichen Dimensionen von Eingangssignal (Einheit  $\text{u}$ ) und Ausgangssignal (dimensionslos) muss die Wirkung der Signumsfunktion noch mit einem anderen Parameter  $\beta$  verglichen werden, der die Gesamtverstärkung beeinflusst. Bei  $\beta = 5 \cdot \frac{1}{\text{u}}$  ergibt sich eine entsprechend größere Amplitude:

$$S_{\text{ds,tanh}}\left(x(t), 5 \frac{1}{u}\right)$$

$$t \in [-1, +1] \tau,$$

$$y \in [-0.1, +0.1]$$



Der Parameter  $\beta$  wirkt (natürlich nur näherungsweise) als Verstärkungsfaktor des Eingangssignals mit sehr kleiner Amplitude  $A \ll u$ .

Eine Verstärkung ist natürlich auch mit einer differentiell superkontinuierlichen Schalterfunktion  $\theta_{\text{ds}}(x, \beta)$  möglich, da sich die Thetafunktionen von den Signumsfunktionen nur dadurch unterscheiden, dass sie um den Faktor  $\frac{1}{2}$  gestaucht und um den Wert  $\frac{1}{2}$  auf der  $y$ -Achse verschoben sind. Damit sind alle differentiell superkontinuierlichen Schalter, die in der Umgebung von  $x = 0$  einen im asymptotischen Sinne affinen (d.h. einen auf der  $y$ -Achse verschobenen linearen) Bereich haben, dazu geeignet, Signale zu verstärken.

## 6.6 Gleitwellenfunktionen (Sweep)

Durch gezielte Wahl des Parameters  $\beta$  kann mit Hilfe der differentiell superkontinuierlichen Schaltfunktionen zwischen zwei Wellenzahlen  $k_1$  und  $k_2$  einer trigonometrischen Funktion  $\text{trig}(kx)$  in der Umgebung eines Umschaltpunktes  $a$  gleitend umgeschaltet werden:

$$\text{Sweep}_{\text{ds}}(a, k_1, k_2, \text{trig}, x, \beta) := \text{trig}(kx)$$

Hierbei ist die Wellenzahl  $k$  eine differentiell superkontinuierliche Funktion:

$$k(x, \beta) := k_1 \cdot \text{Off}_{\text{ds}} \left( \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{\beta} \right), x, \beta \right) + k_2 \cdot \text{On}_{\text{ds}} \left( \frac{1}{2} \left( a + \frac{1}{\beta} \right), x, \beta \right)$$

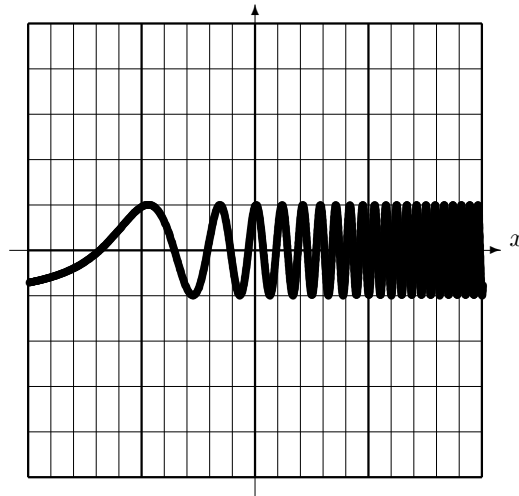
mit

$$\text{trig}(kx) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

Der Kehrwert von  $\beta$  bestimmt, innerhalb welcher ungefähren Intervalllänge der fließende Wechsel zwischen zwei Wellenzahlen  $k_1$  und  $k_2$  um den Umschaltmittelpunkt  $a$  herum stattfindet. Die folgenden Graphik stellt genau dieses Intervall dar:

$$\text{Sweep}_{\text{ds,tanh}} \left( 0, \frac{\pi}{4u}, \frac{5\pi}{u}, \cos, x, \frac{1}{20u} \right)$$

$$x \in [-10, +10] u, \\ y \in [-5, +5]$$



## 6.7 Hohlraumstrahlungsformel

Die Idee, dass sich zwei asymptotisch unterschiedliche Verhaltensweisen als fließender Umschaltvorgang zwischen diesen beiden Zuständen auffassen lässt, möchte ich anhand der Formeln für die Strahlungsdichte der Hohlraumstrahlung darlegen. Zunächst seien aber folgende Abkürzungen und Einheiten definiert:



$c$	Lichtgeschwindigkeit	als Basiseinheit	
$h$	Wirkungsquantum	als Basiseinheit	
$\nu$	Frequenz	Einheit:	$\nu_u$
$\varepsilon := h\nu$		Einheit:	$\varepsilon_u := h\nu_u$
$T$	Temperatur	Einheit:	$T_u$
$k$	Boltzmann-Konstante	Einheit:	$\frac{\varepsilon_u}{T_u}$
$\beta := \frac{1}{kT}$		Einheit:	$\frac{1}{\varepsilon_u}$
$A := \frac{8\pi}{h^2c^3}$		zusammengesetzte Einheit	

Damit lassen sich die verschiedenen Formeln für die Strahlungsdichte (Wirkungsdichte) kompakter darstellen:

$$\begin{aligned} \varrho_{RJ}(\varepsilon, \beta) &:= A \frac{1}{\beta} \varepsilon^2 && \text{Rayleigh-Jeans, } \varepsilon \ll kT \\ \varrho_W(\varepsilon, \beta) &:= A \varepsilon^3 e^{-\beta\varepsilon} && \text{Wien, } \varepsilon \gg kT \\ \varrho_P(\varepsilon, \beta) &:= A \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} && \text{Planck, für alle } \varepsilon \end{aligned}$$

Aus den vorgenannten Voraussetzungen über die Einheiten ergibt sich, dass das Produkt  $k \cdot T$  in Vielfachen der Einheit  $\varepsilon_u$  gemessen wird; die physikalischen Einheiten der Rayleigh-Jeans-Formel und der Wien-Formel sind daher wegen  $\frac{1}{\beta} = kT$  identisch.

Zum weichen Umschalten zwischen der Rayleigh-Jeans-Formel und der Wien-Formel benutzen wir speziell die differentiell superkontinuierlichen Tangens-hyperbolicus-Schalter:

$$\varrho_{ds, \tanh}(\varepsilon_0, \beta, \varepsilon, \beta) := \text{Off}_{ds, \tanh}(\varepsilon_0, \varepsilon, \beta) \cdot \varrho_{RJ}(\varepsilon, \beta) + \text{On}_{ds, \tanh}(\varepsilon_0, \varepsilon, \beta) \cdot \varrho_W(\varepsilon, \beta)$$

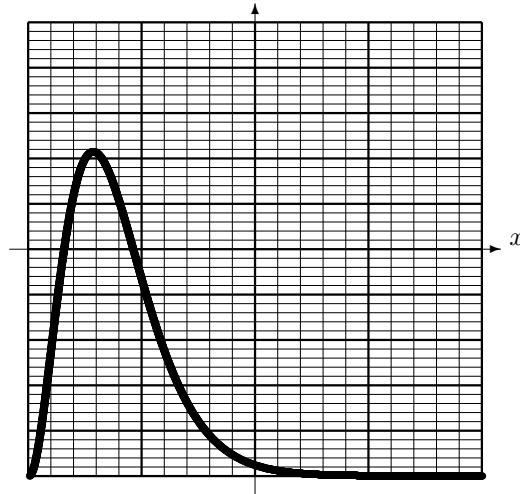
Die folgenden Graphen zeigen die starke Ähnlichkeit mit der Planck-Formel, wobei der Umschaltpunkt  $\varepsilon_0 = 0.5 \varepsilon_u$  graphisch-empirisch ermittelt worden ist.

Im folgenden sind drei Graphik-Paare dargestellt. Die jeweils erste Graphik zeigt die Planck-Formel, die jeweils zweite Graphik zeigt die Formel durch weiches Umschalten der beiden Grenzfälle der Wien-Formel und der Rayleigh-Jeans-Formel:

Parameter  $\beta = \frac{1}{\varepsilon_u}$ :

$$\varrho_P(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon_u})$$

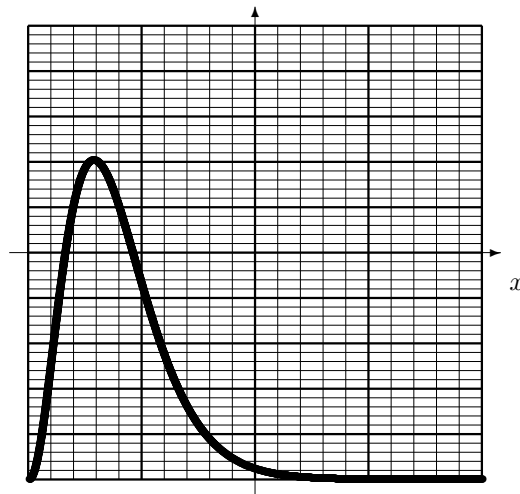
$x \in [0, 20] \varepsilon_u,$   
 $y \in [0, 50] \text{ A}$



Planck-Formel

$$\varrho_{\text{ds,tanh}}(0.5 \varepsilon_u, \frac{1}{\varepsilon_u}, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon_u})$$

$x \in [0, 20] \varepsilon_u,$   
 $y \in [0, 50] \text{ A}$

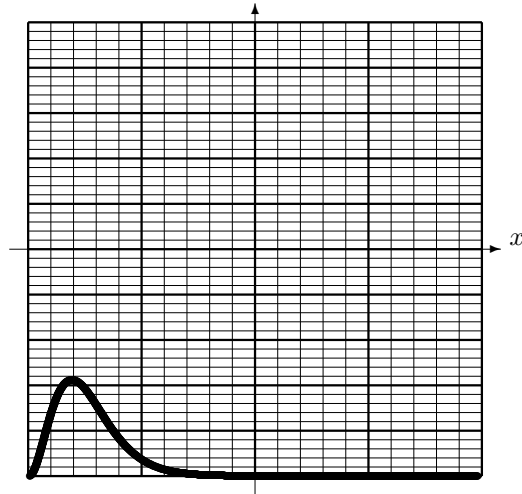


Raley-Jeans-Formel und  
 Wien-Formel differentiell  
 superkontinuierlich umgeschaltet

Parameter  $\beta = \frac{1.5}{\varepsilon_u}$ :

$x \in [0, 20] \varepsilon_u,$   
 $y \in [0, 50] \text{ A}$

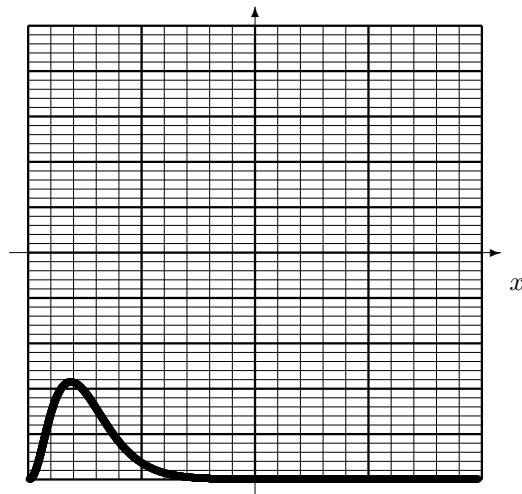
$$\varrho_P\left(\varepsilon, \frac{1.5}{\varepsilon_u}\right)$$



Planck-Formel

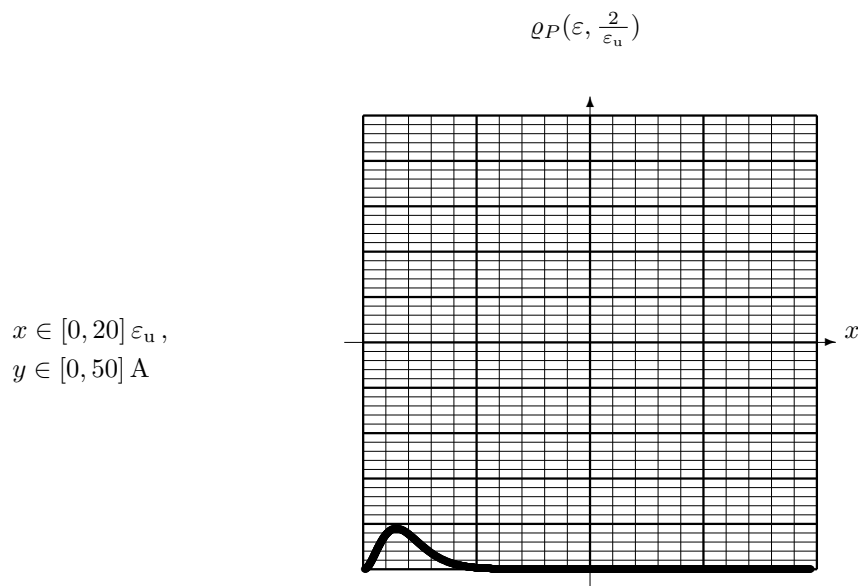
$x \in [0, 20] \varepsilon_u,$   
 $y \in [0, 50] \text{ A}$

$$\varrho_{\text{ds,tanh}}\left(0.5 \varepsilon_u, \frac{1.5}{\varepsilon_u}, \varepsilon, \frac{1.5}{\varepsilon_u}\right)$$

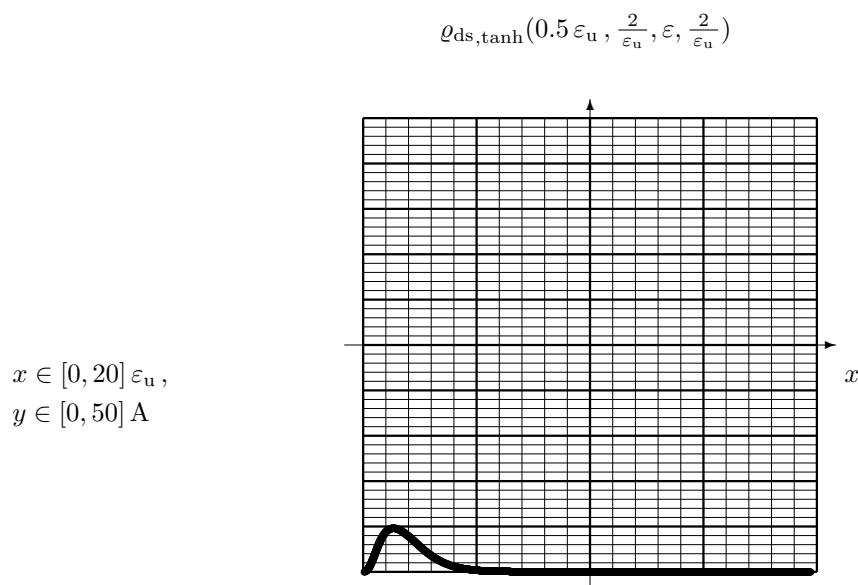


Raley-Jeans-Formel und  
 Wien-Formel differentiell  
 superkontinuierlich umgeschaltet

Parameter  $\beta = \frac{2}{\varepsilon_u}$ :



Planck-Formel



Raley-Jeans-Formel und  
Wien-Formel differentiell  
superkontinuierlich umgeschaltet

Im Rahmen der graphischen Genauigkeit ist jeweils sogar die Stelle des Dichte-Maximums mit der Stelle des Maximums der Planck-Formel identisch. Sogar die Verschiebung des Maximums stimmt in dem aufgezeigten Bereich für  $\beta$  mit der Planck-Formel gut überein.

Die neue Formel für die Strahlungsdichte ist zwar auf einfache Art und Weise konstruiert worden, aber die analytische Bestimmung des Maximums scheint nicht möglich zu sein.

# Kapitel 7

## Bahnkurven

Mit den differentiell superkontinuierlichen Schaltfunktionen ist es auch möglich, Bahnkurven zu erzeugen, die abschnittsweise asymptotisch unterschiedliche Verhaltensweisen aufweisen, aber dennoch über die Zeit  $t$  differentiell superkontinuierliche Vektorfunktionen sind.

Die asymptotischen Verhaltensweisen werden durch gewöhnliche zeitabhängige Vektorfunktionen  $\vec{r}_j(t)$  beschrieben, die dann anschließend mit den differentiell superkontinuierlichen Schaltfunktionen zu der gesamten Bahnkurve  $\vec{r}(t, \beta)$  mit dem reziproken Zeitparameter  $\beta > 0$  (Einheit einer Frequenz) zusammengeleimt werden.

Im ersten Schritt sollte überlegt werden, wie sich die gesamte Bahnkurve  $\vec{r}(t, \beta)$  in den beiden Grenzfällen  $t \rightarrow -\infty$  und  $t \rightarrow +\infty$  verhalten soll. Wir definieren daher diese beiden Fälle wie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{-\infty}(t) &:= \text{Grenzfunktion für } t \rightarrow -\infty \\ \vec{r}_{+\infty}(t) &:= \text{Grenzfunktion für } t \rightarrow +\infty\end{aligned}$$

Das endliche Zeitintervall  $I := [t_0, t_N]$  sei in  $N$  Teilintervalle  $I_j$  mit  $j = 0, \dots, N-1$  und den jeweiligen zeitlichen Übergabepunkten  $t_j$  und den jeweiligen Intervalllängen  $T_j := t_{j+1} - t_j$  unterteilt.

Die jeweils in dem Intervall  $I_j$  asymptotisch gültige Bahnkurve sei durch  $\vec{r}_j(t)$  mit dem jeweiligen Anfangswert  $\vec{r}_j(0)$  für  $t = 0$  spezifiziert. Ein Bahnabschnitt  $\vec{r}_j(t)$  wird also zunächst so aufgeschrieben, als habe er den Anfangswert zum Zeitpunkt Null. Die zeitliche Verschiebung wird erst beim Zusammenbauen der gesamten Bahnkurve vorgenommen.

Die in der Zeitvariablen  $t$  differentiell superkontinuierliche Konstruktion der gesamten Bahnkurve  $\vec{r}(t, \beta)$  geschieht durch Anwendung bestimmter differentiell superkontinuierlicher Schaltungen auf die Zeitvariable  $t$ :

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t, \beta) &:= \vec{r}_{-\infty}(t - t_0) \cdot \text{Off}_{\text{ds}}(t_0, t, \beta) \dots \\
&\dots + \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \vec{r}_j(t - t_j) \cdot \text{Get}_{\text{ds}}(t_j, t_{j+1}, t, \beta) \right\} \dots \\
&\dots + \vec{r}_{+\infty}(t - t_N) \cdot \text{On}_{\text{ds}}(t_N, t, \beta)
\end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsverlauf ergibt sich einfach durch Differenzieren der Bahnkurve nach der Zeit, wobei Terme mit Deltafunktionen und Hakenfunktionen entstehen:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t, \beta) &= \dot{\vec{r}}_{-\infty}(t - t_0) \cdot \text{Off}_{\text{ds}}(t_0, t, \beta) - \vec{r}_{-\infty}(t - t_0) \cdot \delta_{\text{ds}}(t - t_0, \beta) \dots \\
&\dots + \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \dot{\vec{r}}_j(t - t_j) \cdot \text{Get}_{\text{ds}}(t_j, t_{j+1}, t, \beta) \right\} \dots \\
&\dots + \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \vec{r}_j(t - t_j) \cdot \text{Hook}_{\text{ds}}(t_j, t_{j+1}, t, \beta) \right\} \dots \\
&\dots + \dot{\vec{r}}_{+\infty}(t - t_N) \cdot \text{On}_{\text{ds}}(t_N, t, \beta) + \vec{r}_{+\infty}(t - t_N) \cdot \delta_{\text{ds}}(t - t_N, \beta)
\end{aligned}$$

Bei der Beschleunigung kommen für die Übergangzeitpunkte durch das Differenzieren zusätzlich Terme mit Zickzackfunktionen und Krallenfunktionen hinzu:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}(t, \beta) &= \ddot{\vec{r}}_{-\infty}(t - t_0) \cdot \text{Off}_{\text{ds}}(t_0, t, \beta) \dots \\
&\dots - 2\dot{\vec{r}}_{-\infty}(t - t_0) \cdot \delta_{\text{ds}}(t - t_0, \beta) \dots \\
&\dots - \vec{r}_{-\infty}(t - t_0) \cdot Z_{\text{ds}}(t - t_0, \beta) \dots \\
&\dots + \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \ddot{\vec{r}}_j(t - t_j) \cdot \text{Get}_{\text{ds}}(t_j, t_{j+1}, t, \beta) \right\} \dots \\
&\dots + 2 \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \dot{\vec{r}}_j(t - t_j) \cdot \text{Hook}_{\text{ds}}(t_j, t_{j+1}, t, \beta) \right\} \dots \\
&\dots + \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \vec{r}_j(t - t_j) \cdot \text{Claw}_{\text{ds}}(t_j, t_{j+1}, t, \beta) \right\} \dots \\
&\dots + \ddot{\vec{r}}_{+\infty}(t - t_N) \cdot \text{On}_{\text{ds}}(t_N, t, \beta) \dots \\
&\dots + 2\dot{\vec{r}}_{+\infty}(t - t_N) \cdot \delta_{\text{ds}}(t - t_N, \beta) \dots \\
&\dots + \vec{r}_{+\infty}(t - t_N) \cdot Z_{\text{ds}}(t - t_N, \beta)
\end{aligned}$$

Um ein konkretes Beispiel einer (zweidimensionalen) Bahnkurve zu entwerfen, legen wir uns zunächst auf zwei abstrakte Basiseinheiten fest; die Zeiteinheit sei  $\tau$  und die Längeneinheit sei  $\lambda$ . Desweiteren seien zwei Frequenzeinheiten  $\nu$ ,  $\omega$  und eine Geschwindigkeitseinheit  $v$  definiert:

$$\nu := \frac{1}{\tau}, \quad \omega := 2\pi\nu, \quad v := \frac{\lambda}{\tau}$$

Als Längenkonstanten seien definiert:

$$\begin{aligned} A &:= 7\lambda, & B &:= 3\lambda, & C &:= 6\lambda, & D &:= 5\lambda \\ E &:= 3\lambda, & F &:= 1\lambda, & R &:= 2\lambda \end{aligned}$$

Die asymptotischen Zeitverhaltensweisen für  $t \rightarrow -\infty$  und für  $t \rightarrow +\infty$  der gesamten Bahnkurve seien zeitkonstante Ortsvektoren:

$$\vec{r}_{-\infty}(t) := \begin{pmatrix} -C \\ A \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_{+\infty}(t) := \begin{pmatrix} D - R \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der Bahnabschnitte dazwischen sei  $N := 4$ , d.h. der Index  $j$  für die Nummer des Bahnabschnittes läuft von 0 bis 3. Der nullte Bahnabschnitt sei eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vertikal nach unten:

$$\vec{r}_0(t) := \begin{pmatrix} -C \\ -(A - B)Nvt + A \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anschließend soll diese Bewegung in eine horizontale Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit umgelenkt werden:

$$\vec{r}_1(t) := \begin{pmatrix} (C - E)Nvt - C \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$$



Diese Bewegung soll danach in eine Wellenbewegung übergehen:

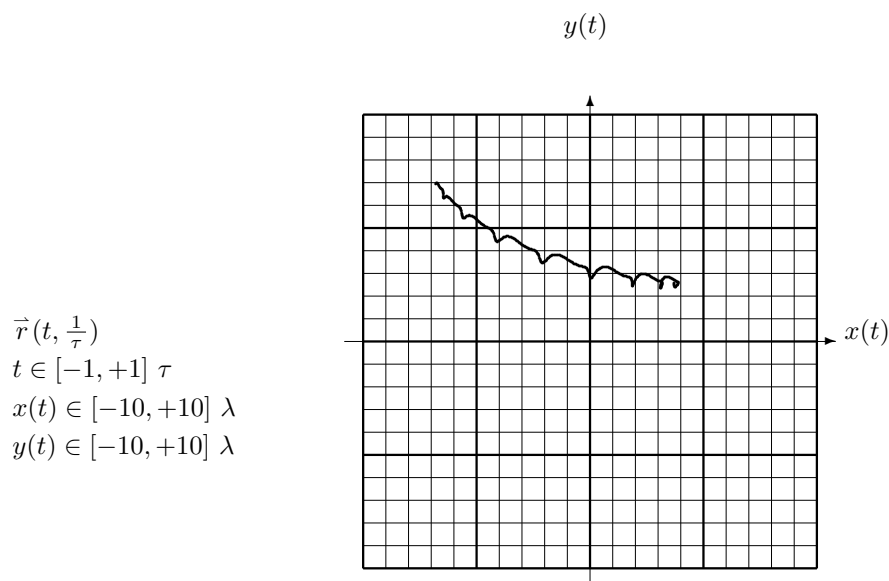
$$\vec{r}_2(t) := \begin{pmatrix} (D - R + E)N \omega t - E \\ F \sin(2N \omega t) + B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abschließend soll eine Kreisbewegung stattfinden, bevor die Gesamtbewegung bei  $\vec{r}_{+\infty}$  endet:

$$\vec{r}_3(t) := \begin{pmatrix} -R \cos(N \omega t) + D \\ R \sin(N \omega t) + B \\ 0 \end{pmatrix}$$

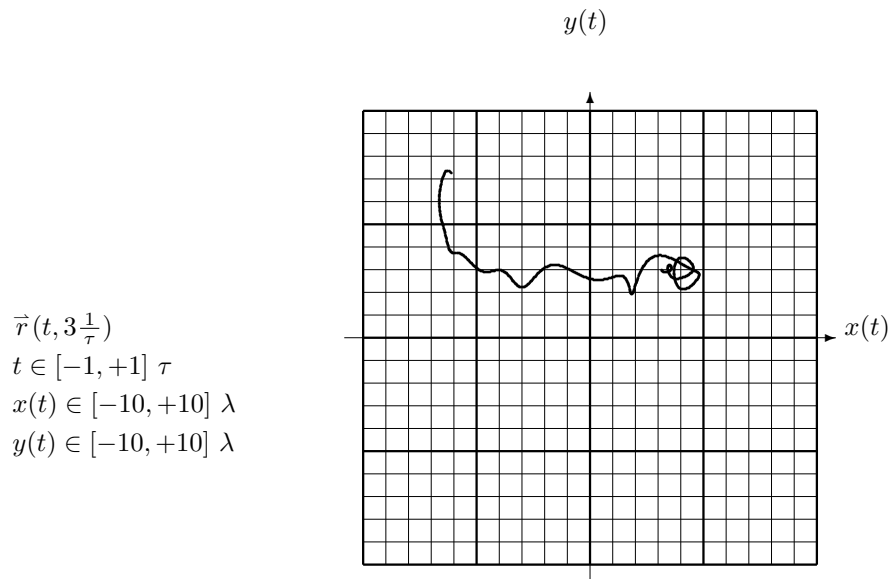
Die Berechnung der gesamten Bahnkurve in den nachfolgenden Graphen wurde in dem Zeitintervall  $[-1, +1] \cdot \tau$  durchgeführt. Der Startzeitpunkt für  $\vec{r}_0(t)$  ist  $t_0 = -\frac{1}{2}\tau$ , und der Stoppzeitpunkt für  $\vec{r}_3(t)$  ist  $t_3 = +\frac{1}{2}\tau$ . Jedes Teilintervall  $T_j$  hat die Dauer  $\frac{1}{N}\tau$ .

Der erste Graph zeigt die Bahnkurve mit dem zeitlichen Parameter  $\beta = \frac{1}{\tau}$ :

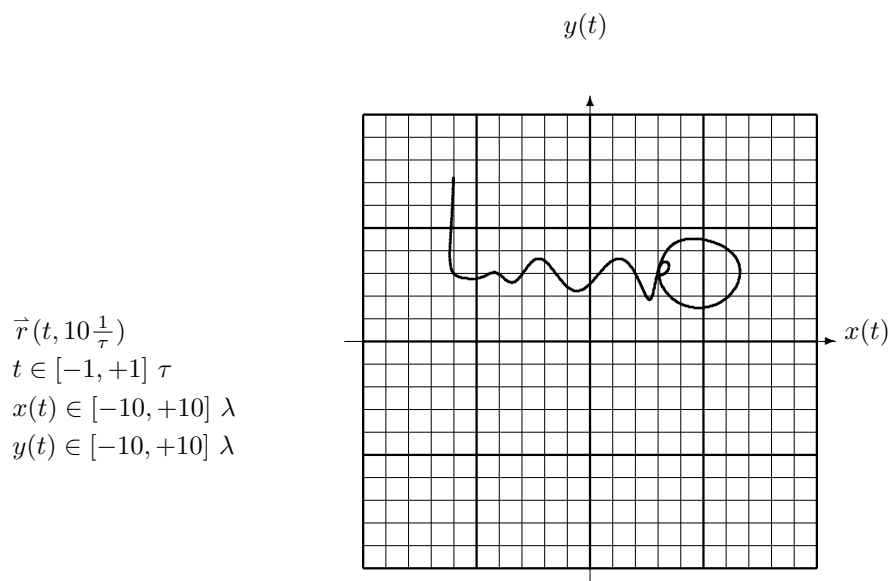


Hier ist allerdings kaum etwas von der beabsichtigten Gesamtverhaltensweise zu erkennen. Dies liegt daran, dass der Parameter  $\beta$  noch viel zu schwach eingestellt worden ist und sich alle Bahnabschnitte noch stark überlagern.

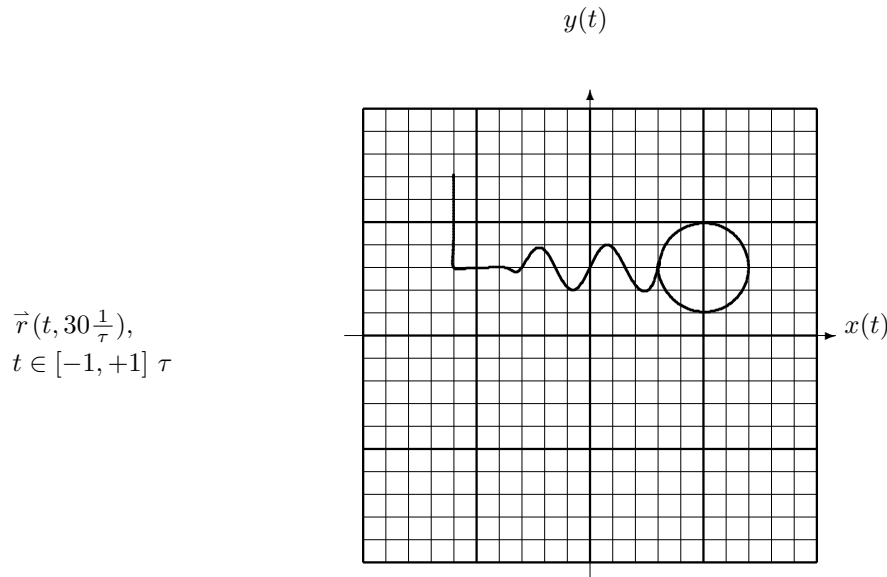
Eine etwas schwächere Überlagerung aller Bahnabschnitte liegt vor, wenn der Parameter beispielsweise auf  $3 \cdot \frac{1}{\tau}$  erhöht wird:



Erst die Erhöhung des Parameters  $\beta$  auf  $10 \cdot \frac{1}{\tau}$  lässt die Gesamtkurve andeutungsweise erkennbar werden:



Je größer der Parameter  $\beta$ , desto kleiner wird der  $\varepsilon$ -Schlauch um die beabsichtigte Bahnkurve und desto stärker muss ein beschleunigendes Feld an den Übergängen wirken. Bei  $\beta = 30 \cdot \frac{1}{\tau}$  sind kaum noch Überlagerungen von benachbarten Kurvenabschnitten erkennbar:

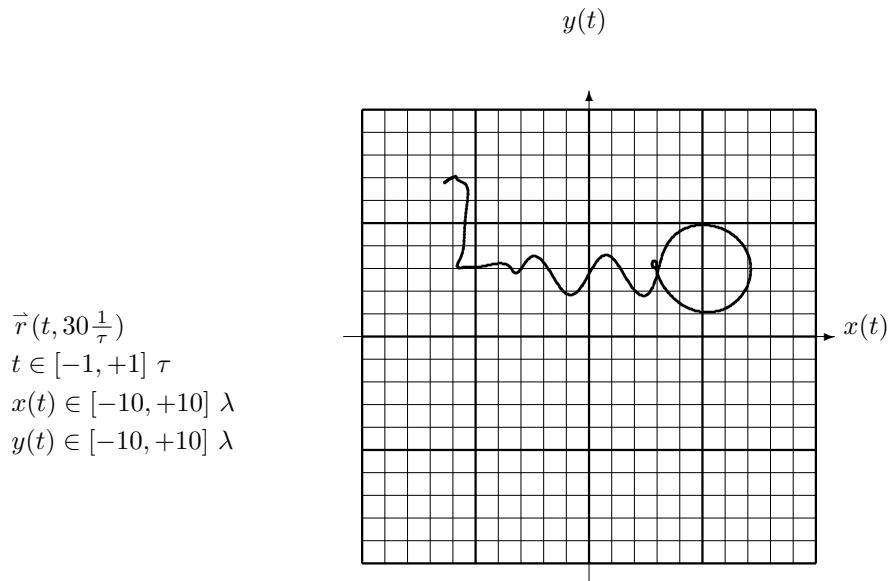


Hierbei ist es besonders wichtig, dass an den Übergängen differentiell superkontinuierliche Schalter derselben Sorte verwendet werden. Eine gemischte Anwendung von Schaltern mit unterschiedlichen Charakteristika kann zu Abweichungen von der geplanten Bahnkurve führen, obwohl derselbe Parameter  $\beta = 30 \cdot \frac{1}{\tau}$  verwendet worden ist. Zunächst die Formeln für die Koordinaten  $x(t)$  und  $y(t)$  mit den vermischten Schaltcharakteristiken:

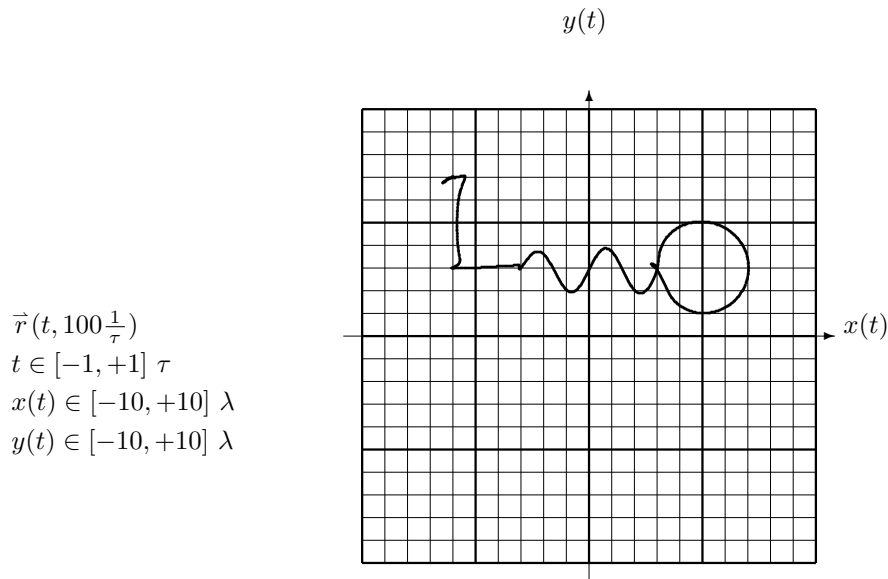
$$\begin{aligned}
 x(t) = & x_{-\infty}(t - t_0) \cdot \text{Off}_{\text{ds,tanh}}(t_0, t, \beta) \\
 & + x_0(t - t_0) \cdot \text{Get}_{\text{ds,arctan}}(t_0, t_1, t, \beta) \\
 & + x_1(t - t_1) \cdot \text{Get}_{\text{ds,sqrt}}(t_1, t_2, t, \beta) \\
 & + x_2(t - t_2) \cdot \text{Get}_{\text{ds,Fermi}}(t_2, t_3, t, \beta) \\
 & + x_3(t - t_3) \cdot \text{Get}_{\text{ds,tanh}}(t_3, t_4, t, \beta) \\
 & + x_{+\infty}(t - t_4) \cdot \text{On}_{\text{ds,arctan}}(t_4, t, \beta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & y_{-\infty}(t - t_0) \cdot \text{Off}_{\text{ds,sqrt}}(t_0, t, \beta) \\
& + y_0(t - t_0) \cdot \text{Get}_{\text{ds,Fermi}}(t_0, t_1, t, \beta) \\
& + y_1(t - t_1) \cdot \text{Get}_{\text{ds,tanh}}(t_1, t_2, t, \beta) \\
& + y_2(t - t_2) \cdot \text{Get}_{\text{ds,arctan}}(t_2, t_3, t, \beta) \\
& + y_3(t - t_3) \cdot \text{Get}_{\text{ds,sqrt}}(t_3, t_4, t, \beta) \\
& + y_{+\infty}(t - t_4) \cdot \text{On}_{\text{ds,Fermi}}(t_4, t, \beta)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis sind Übergänge, die nicht zueinander passen:



Selbst eine Erhöhung des Parameters auf beispielsweise  $\beta = 100 \cdot \frac{1}{\tau}$  führt stellenweise nicht zwangsläufig zu einer Annäherung an die geplante Bahn:



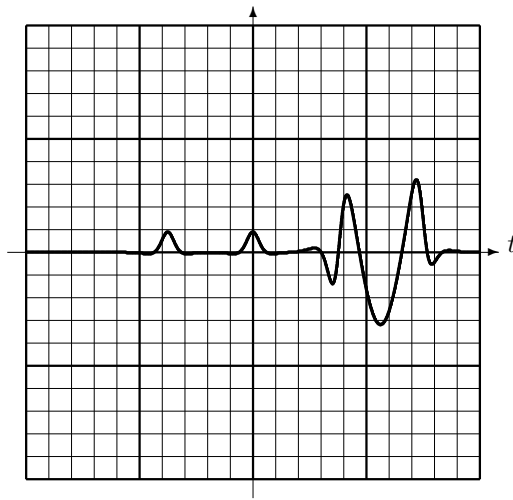
Wenn nun ein geladenes elektrisches Teilchen mit der Masse  $m$  und der Ladung  $q$  eine solche Bahnkurve entlangfliegen soll, dann muss das elektromagnetische Feld gemäß der Lorentzkraftgleichung

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

entsprechend eingestellt werden. Die Gesamtbeschleunigung ist wegen der Vorgabe des gesamten Bewegungsverlaufes bekannt. Die folgenden Graphen zeigen  $\ddot{x}(t)$  und  $\ddot{y}(t)$  im Zeitintervall  $[-1, +1]\tau$ . Der eigentliche Bewegungsverlauf soll eigentlich bei  $t_0 = -\frac{1}{2}\tau$  beginnen und bei  $t_3 = \frac{1}{2}\tau$  enden. Da es sich jedoch um asymptotisches Ein- und Ausschalten von Bahnabschnitten handelt, bestehen auch kleine Wirkungen vor dem Startzeitpunkt und nach dem Stoppzeitpunkt. Deshalb ist das dargestellte Zeitintervall etwas größer gewählt worden. Wegen der zum Teil sehr großen Beschleunigungen mussten die Funktionswerte für die Graphen extrem gestaucht werden. Ein Teilstrich auf der Ordinate repräsentiert eine Beschleunigung von  $2.5 \cdot 10^3 \frac{\lambda}{\tau^2}$ :

$$\ddot{x}(t)$$

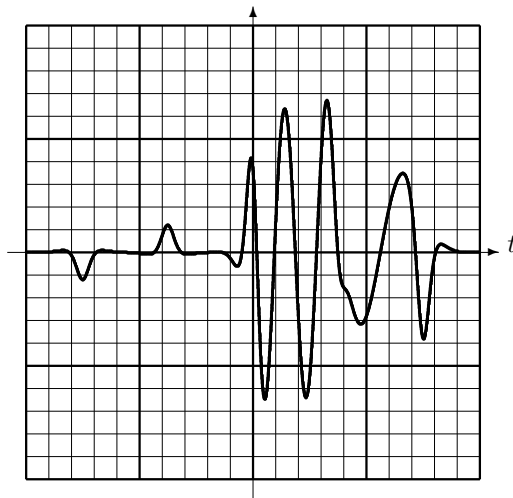
$$\ddot{x} \in [-25, +25] \cdot 10^3 \frac{\lambda}{\tau^2},$$
$$t \in [-1, +1] \tau$$



Beschleunigung entlang der  $x$ -Achse

$$\ddot{y}(t)$$

$$\ddot{y} \in [-25, +25] \cdot 10^3 \frac{\lambda}{\tau^2},$$
$$t \in [-1, +1] \tau$$



Beschleunigung entlang der  $y$ -Achse



# Kapitel 8

## Schlussbemerkungen und Ausblicke

Alle differentiell superkontinuierlichen Operationen bauen auf nur einem einzigen Begriff auf, nämlich auf der Funktionenklasse der Abstandsfunktionen, die eine Loslösung vom bisherigen Abstandsbegriff verlangen.

Dadurch ist es möglich geworden, beliebige asymptotische Verhaltensweisen von Funktionen zu konstruieren, die differentiell superkontinuierliche Funktionen ergeben. Das bedeutet, dass diese Funktionen grundsätzlich mit Systemen von Differentialgleichungen verträglich sind und ohne Bedenken in Differentialgleichungen eingesetzt werden können. Allerdings scheinen selbst die einfachsten Potentiale bzw. Kraftfelder, die differentiell superkontinuierlich ein- und ausgeschaltet werden, keine einfachen analytischen Lösungen der Bewegungsgleichungen zu liefern, da die differentiell superkontinuierlichen Schaltvorgänge zum Potential bzw. zur Kraftfunktion mit dazugehören. Andererseits scheint dies ein vernünftiger Ansatz dafür zu sein, die physikalischen Vorgänge als zusammenhängendes Ganzes zu beschreiben.

Als Anwendungsgebiete sind z.B. die digitale Audio- und Videobearbeitung (Interpolation, Erzeugung von Effekten usw.), die sanfte Steuerung von Maschinen und Robotern, die elektrodynamische Erzeugung von Feldern sowie die Elementarteilchenphysik mit neuen Potentialansätzen vorstellbar. So könnte beispielsweise der Ausdruck  $\frac{1}{r}$  durch  $\frac{1}{a_{\text{ds}}(x,\beta)}$ , dem Kehrwert einer Abstandsfunktion ohne Nullstelle, in der Kraftformel nach Coulomb ersetzt werden. Eine Computersimulation mit zwei sich anziehenden Teilchen in der Form

$$\ddot{\vec{r}} = -A \cdot \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}^3} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{1}{\beta}$$

zeigt ein viel sinnvollerer Bewegungsverhalten: Die beiden Teilchen stürzen nicht aufeinander zu (im Gegensatz zur Coulomb-Formel) und beschreiben, je nach Anfangsbedingungen, Ellipsenbahnen mit Periheldrehung. Es erscheint ebenfalls sinnvoll, eine entsprechende Ersetzung in der Formel nach Lenard-Jones zur Moleküldynamik vorzunehmen.

Auch im Gebiet der Chaosforschung und im Gebiet der Nicht-linearen Dynamik scheinen die differentiell superkontinuierlichen Operatoren anwendbar zu sein, wenn angenommen



wird, dass es physikalische Vorgänge über die Zeit  $t$  gibt, die sich z. B. mit differentiell superkontinuierlichen Schaltern  $\text{On}_{\text{ds}}(t_0, t, \beta)$  und  $\text{Off}_{\text{ds}}(t_1, t, \beta)$  und einer charakteristischen reziproken Zeitkonstante  $\beta$  beschreiben lassen.

Im allgemeinen können diese differentiell superkontinuierlichen Funktionenklassen zur Erzeugung mathematischer Metamorphosen aller Art verwendet werden.

Ein neuer Aspekt der differentiell superkontinuierlichen Operationen liegt darin, dass nicht mehr mit einzelnen Funktionen sondern mit Mengen von Funktionen (Funktionenklassen) im Zusammenhang mit der Differentialrechnung operiert wird. Dieser Gedankenansatz erscheint deshalb vernünftig, da es zu jedem physikalischen Experiment mit endlich vielen Messwerten und endlicher Messgenauigkeit immer unendlich viele differentiell superkontinuierliche Funktionen gibt, die das Experiment innerhalb der Fehlergrenzen korrekt beschreiben. Je kleiner die Messfehler und je größer die Anzahl der Messwerte sind, desto mehr schränkt sich die Menge der in Frage kommenden Funktionen ein; es bleiben aber dennoch immer unendlich viele differentiell superkontinuierliche Funktionen übrig.

Der philosophische Erkenntnisgewinn liegt darin, dass es selbst bei der Annahme, dass es zu einem physikalischen Vorgang genau eine Funktion  $f$  gibt, die diesen Vorgang exakt beschreibt, nie möglich sein wird, diese Funktion eindeutig auf experimentellem Wege zu bestimmen.

# Anhang A

## Wichtige Beziehungen

Die elementaren differentiell superkontinuierlichen Funktionenklassen basieren allesamt auf der Funktionenklasse der differentiell superkontinuierlichen Absolutwert-Funktionen und stehen in folgendem Zusammenhang:

$$R_{\text{ds}}(x, \beta) = \frac{1}{2}(x + A_{\text{ds}}(x, \beta))$$

$$S_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x A_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

$$\theta_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x R_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

$$\delta_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x \theta_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

$$Z_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x \delta_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

$$2\delta_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x S_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

$$X_{\text{ds}}(x, \beta) = S_{\text{ds}}(x, \beta) \cdot A_{\text{ds}}(x, \beta)$$

$$1_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x X_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

$$0_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x 1_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

$$\text{Ln}_{\text{ds}}(x, \beta) = \ln(a_{\text{ds}}(x, \beta))$$

$$\text{Inv}_{\text{ds}}(x, \beta) = \{\partial_x \text{Ln}_{\text{ds}}(x, \beta)\}$$

$$\text{Get}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) = (\theta_{\text{ds}}(x - a, \beta) - \theta_{\text{ds}}(x - b, \beta))$$

$$\text{Hook}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) = \{\partial_x \text{Get}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta)\}$$

$$\text{Claw}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta) = \{\partial_x \text{Hook}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta)\}$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{\text{ds}}(x, \beta) \right\} = 1$$

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon}$$



# Anhang B

## Parameter der Funktionenklassen

Diese Auflistung der Funktionenklassen soll als Schnell-Referenz für die Parameterlisten dienen:

### Allgemeine Operatoren

$LI(f, a, b, x)$   
 $Shift_x(f, a, x)$   
 $Shift_y(f, a, x)$   
 $Stretch_x(f, a, x)$   
 $Stretch_y(f, a, x)$

### Differentiell superkontinuierliche Grundbegriffe

$a_{ds}(x, \beta)$   
 $A_{ds}(x, \beta)$   
 $\delta_{ds}(x, \beta)$   
 $R_{ds}(x, \beta)$   
 $S_{ds}(x, \beta)$   
 $\theta_{ds}(x, \beta)$   
 $X_{ds}(x, \beta)$   
 $Z_{ds}(x, \beta)$   
 $0_{ds}(x, \beta)$   
 $1_{ds}(x, \beta)$   
 $Ln_{ds}(x, \beta)$   
 $Inv_{ds}(x, \beta)$

## Differentiell superkontinuierliche Operatoren

$\text{Off}_{\text{ds}}(a, x, \beta)$

$\text{On}_{\text{ds}}(a, x, \beta)$

$\text{Claw}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta)$

$\text{Clr}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta)$

$\text{Get}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta)$

$\text{Hook}_{\text{ds}}(a, b, x, \beta)$

$\text{Del}_{\text{ds}}(f, a, b, x, \beta)$

$\text{InsSp}_{\text{ds}}(f, a, b, x, \beta)$

$\text{Chg}_{\text{ds}}(f, g, a, x, \beta)$

$\text{Cpy}_{\text{ds}}(f, g, a_f, b_f, a_g, x, \beta)$

$\text{Ins}_{\text{ds}}(f, g, a_f, b_f, a_g, x, \beta)$

# Index

- Absolutbeträge 13
- abstrakte physikalische Einheit 13
- asymptotische Inverse der Multiplikation 29
- asymptotische Logarithmen 28
- asymptotische Null-Intervalle 39
- asymptotische Kehrwerte 29
- Ausblenden von Funktionen 34
- Ausschalter 31
  
- Bahnkurven 69
- Beschleunigung 76
- Betragsfunktionen 13
- Bügeleisen 44
  
- Coulomb-Potential 7
  
- Deltafunktionen 21
- Differenzierbarkeit 5
- differenziell superkontinuierliche Funktionen 5
- differenziell superkontinuierliche Operationen 31
- differenziell superkontinuierliche Umkehrfunktionen 8
- differenziell superkontinuierliche Grundbegriffe 13
- differenziell superkontinuierliches Weltbild 6
  
- Einheit, abstrakte 13
- Einfügen von Intervallen 41
- Einfügen von Leerraum 39
- Einsfunktionen 25
- Einschalter 31
  
- Feld 5
- Funktionenklasse 13
  
- Gleichrichterfunktionen 58
- Gleitwellenfunktionen 62
- Greiffunktionen 32
  
- Grenzfunktionen der Betragsfunktionen 15
  
- Häckselmaschine 47
- Hakenfunktionen 33
- Herausgreifen von Intervallen 32
- Hohlraumstrahlung 63
  
- Inverse der Multiplikation, asymptotisch 29
  
- Kammfunktionen 53
- Kehrwerte, asymptotisch 29
- Kernkräfte, Spekulationen 8
- Klasse von Funktionen 13
- Konvergenz, relative 8
- Kopieren von Intervallen 40
- Krallenfunktionen 33
  
- lineare Interpolation 12
- Logarithmus, asymptotisch 28
- Lorentzkraft 76
- Löschen von Intervallen 38
  
- Modifikation nicht differenziell superkontinuierlicher Funktionen 8
  
- Nullfunktionen 26
- Operationen 11
  - allgemeine 11
  - differenziell superkontinuierliche Operationen 31
  
- Parameter 13
- positive Halbachsen 17
  
- Relative Konvergenz 8
  
- Sägezahnfunktionen 51
- Schaltfunktionen 19
- Signumsfunktion 18
- Spekulationen um Kernkräfte 8
- Strecken 11

Stufenfunktionen	19	Wechsel zwischen Funktionen	36
Teilchenbegriff	5	Weltbild	6
Treppenfunktionen	49	Widerspruch in der Differentialrechnung	6
Umkehrfunktionen	8	Widerspruchsbehauptung	6
Umschalten von Funktionen	36	Beispiel	6
Verschieben	11	Leugnung und Ablenkung	7
Verstärkerfunktionen	60	$X$ -Funktionen	24
Vorzeichenfunktionen	18	Zickzackfunktionen	22